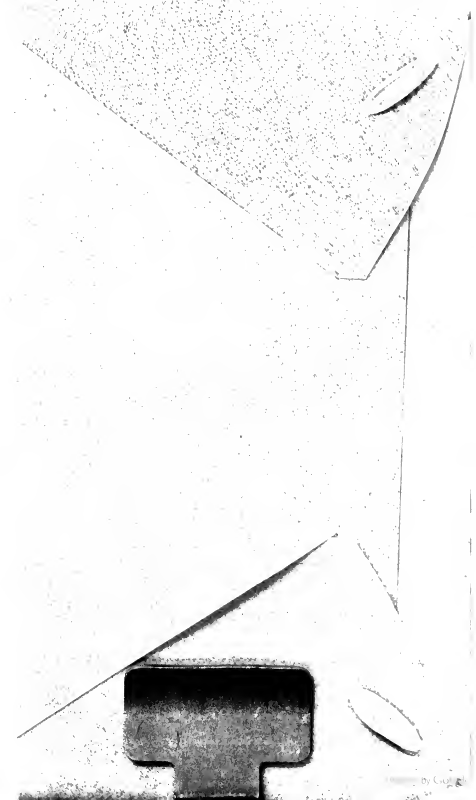




D. GUIDONIS GRANDI

MONACHI CAMALDULENSIS,

ET IN CELEBERRIMA PISANA UNIVERSITATE

Publici Phylosophiæ Professoris

QUADRATURA

CIRCULI, ET HYPERBOLÆ

Per infinitas Hyperbolas, & Parabolas Geometricè exhibita

Accessit & Hyperbolę Dimensio ope Tractorię, & innumerarum Parabolarum, Hyperbolarumque Rectificatio, et alia complura scitu dignissima de Intensione, de Spatiorum variorum Mensura, Calculi Differentialis Analysi, &c.

AD SERENISSIMUM PRINCIPEM

JOANNEM GASTONEM

AB ETRURIA.





PISIS, MDCCIII.

Ex Typographia Francisci Bindi, Impress. Archiepisc.

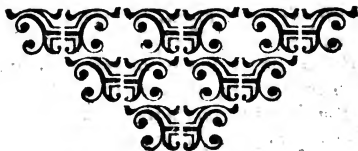
Superiorum Permissu.

SERENISSIMO PRINCIPI
JOANNI GASTONI
AB ETRURIA
LIBELLI NUNCUPATIO.

I Liber, Etrusci, quò te Spes Altera Regni,
Et Medicùm Stirpis Gloria GASTO vocat.
Sive illum invenias Naturæ arcana moventem
Complecti veteres mente, novosque sophos,
Sive Syracusii, Pergaive arte Magistri
Conica regali ducere signa manu,
Seu Divina Sacræ versantem Dogmata Legis,
Et Fidei fastos, ac monumenta Patrum;
Magni Animi Genium pro me venerare, meique
Obsequii per te Pignus habere jube.
Hinc memora, ut discant quadrato limite claudi
Cyclus, & excessus Sectio nomen habens,
Implicet innumeras quamvis mensura figuras,
Non definitis significanda notis.
Idem Æquus Judex, Moecenas Optimus idem
Lecto operi laudem, Præsidiumque dabit
Ejus & Auspiciis tibi mox sperare licebit,
Et Famã, & quidquid non tuus Auctor habet.

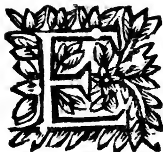
 Ibis

Ibis ab invidiæ ſaltem diſcrimine purus,
Nec, Tanto illuſtris Nomine, vilis eris,
Nam licet hæc tractes, quæ vulgo incognita risũ,
Contemptumue rudi à plebe referre ſolent,
Atque aliquis te Rhetoricas quadrare Figuras
In primo frontis limine crediderit,
Tanta ſciendarum tenet ignorantia rerum
Quos apinæ, & tricę paſcere ſæpe ſolent!
Cum tamen à Magno te quis GASTONE probari
Audiet, aut tantùm promeruiſſe legi,
Nonnihil abiecto ſub cortice ineſſe putabit,
Et Pretium Tanti Principis addet Amor.



AD LECTOREM

PRÆFATIO.

X omnibus Conicis Sectionibus curva aliqua circumſeptis ſolam Parabolen Magni Archimedis induſtria ad quadratos, ſeu rectilineos fines redactam accepimus, idque duplici via, quarum poſtremam jure meritoque inſcriberes *Quadraturam Parabolæ per Infinita Triangula*, eò ſiquidem rem deducit Divinus ille Geometra, ut Parabolæ ſpatium Infinitę Seriei Triangulorum in quadrupla ratione decreſcentium æquale demonſtret, adeòque maximi inſcripti epitritum renunciet. Iiſdem ego veſtigiis inſiſtens analogiam hanc promovere, & ad ſectiones alias exporrigere olim decreveram, *Hyperbolæ quidem per infinitas Parabolas*, *Circuli verò per infinitas Hyperbolas Quadraturam* brevi libello complexus, cui jam

deservientes tabulæ primæ figuras ære incisas habebam, omniaque prælo parata, ac penè commissa reliqueram. Cùm ecce apud Amicum optimum Celeberrimi viri Nic. Mercatoris Logarithmotechniam offendo, meamque de Hyperbola ad infinitas parabolas traducenda cogitationem, quam mihi primò illuxisse credideram, jamque apud amicos invulgaveram; & in qua præcipuum libelli illius nervum constitueram, ab illo jam præoccupatam invenio; Meæ itaque nativitatis moras incusans, de libelli illius editione ferè desperaveram; Amicis nihilominus aliud suadentibus, & methodi, qua hæc demonstraveram, abolitionem penitus non ferentibus, cedendum duxi. actum tamen agere ne viderer, Quod tum mihi palmarium fuerat, & principem libelli locum obtinebat, velut minùs præcipuum habere, & tamquam vulgatum è sua sede in calcem libri detrudere coactus fui (quam non servati incisarum jam figurarum ordinis causam habes) & preterquàm quod præoccupatæ jam Hyperbolicæ Quadraturæ per infinitas Para-

Parabolas loco aliam mihi propriam, & in Hugenianis præindicatam ſubſtitui ope ſimplicis Tractoriç facillimè exequendam, quam mihi adhuc integram manere arbitror, nova rurſus acceſſione utramque Circuli, & Hyperbolæ Quadraturam cumulavi, illam etiam ad infinitas parabolas, hanc pariter ad infinitas hyperbolas traducens, ut jam utroque modo utraque ſectio dimenſionem qualemcunque ſubiret, largiori etiam deinceps manu in digreſſiones profuſus, brevemque de Curvarum longitudinibus dimetiendis Appendicem adiiciens, ut in tam varia rerum ſegete certior eſſe poſſem, aliquid ſaltem antea non animadverſum à me proponi; quamquàm poſt tot hujus ævi acutiſſimos Geometras, in argumento prçſertim tandiù, et per tot methodos exculto, difficillimum ſit non in eaſdem penitus cogitationes incidere præceſſoribus noſtris communes, nec ullius tritas veſtigiis ſemitas recalcare. Monuit olim Phyloſophus 1. *Metheor. tex.* 8. *Non ſemel, nec bis, neque rarò eaſdem opiniones reverti factas in hominibus, ſed infinities*. De-

 lirium

lirium hoc ad ſuam de mundi æternitate ſententiam facilè conſequens, dempta illa infinitatis exaggeratione, Oraculum erit, cujus veritatem & in dies experimur, & ſera poſteritas cumulatiſsimis exemplis aptiùs confirmabit, quandoquidem tot Veterum Phyloſophorum ſententias hac ætate denuò in lucem aſſertas videmus, & pro novis propoſitas, quarum non rudia dumtaxat ſpecimina, ſed expreſſa lineamenta inter antiqua dogmata à Plutarcho, Seneca, Ariſtotele, aliiſque relata frequenter occurrunt, atque integra, ut ſubſpicor, ſyſtemata ferè haberemus, niſi illorum phyloſophica commentaria nobis Antiquitas invidiſſet; Licet autem nullum non moveant lapidem Critici, ut Plagiarii notam propterea in ejuſmodi Neophyloſophos transferant, quaſi inventionis gloriam affectaverint, non video tamen quid obſit, quò minùs & abſque prçvia Veterum idem ſentientium notitia, vel animadverſione in eas cogitationes Viri Clariſſimi per ſe venire potuerint, nec facilè adducar, ut credam, quę omnium oculis proſtant, nec ullo

ullo ipsorum artificio aboleri poterant, inanis, & paucorum hominum respectu ad non ita multos dies victuræ Gloriolæ spe, data opera Prudentes Viros dissimulare studuisse. Utcunque tamen ea res sit, quæ me nullatenus tangit, Certum est, Res Phylosophicas diversis hominum sententiis obnoxias esse, atque ut est hominum varium ingenium, diversas plerumque de iisdem Naturæ effectibus opiniones variorum mentibus innasci, eorumque geniis arridere, quarè & difficiliorem esse in his consensum, nisi alius ab alio acceperit, & formam, quam imitaretur, attenderit, unde illud vulgatissimū: *Facilius, quàm inter phylosophos, inter horologia conveniet*. At in Geometricis non facile id modò, sed prorsus necessarium est, & si integræ Mathematicorum diversissimis terrarum locis agentium myriadi (nec enim simul id hominum genus habitare solet, sed hac illac spargi) idem Problema solvendum proposueris, eadem erit quò ad rem ipsam omnium solutio, nec fieri poterit, quin multi in methodo, & via solutionis ultrò conveniant. Innu-

mera

mera sunt, quę rerum Geometricarum contemplationi incumbens per me ipsum inveneram, atque inter Adversaria mea retuleram; quæ postmodum à Clarissimis Mathematicis dudum animadversa, & publicò jam consignata fuisse deprehendi, atque hęc aut prorsus suppressi, aut siqua occasione in lucem asserui, non dissimulavi primorum Auctorum Nomina, iis Inventionis Gloriam deferens, quos par erat sua sorte gaudere, nec impolterum dissimulabo si tale quid ante mearum speculationum editionem animadvertere contigerit; Qui autem me, & mea norunt, non adeò curtam mihi suppetere sciunt rerum ejusmodi supellectilem, ut ex alieno censu quidpiam corradere indigeam; Otium, & facultates desunt ad propria edenda, tantum abest, ut ab esterorum laboribus mihi vindicatis gloriam expectem. Erunt alia fortasse, tum in hoc, tum in editis antehac opusculis nostris, vel in postmodum edendis, quæ vel alii Geometræ præindicaverint vel pleniùs fortè illustraverint, neque in his ego palmam ulli aut pręripe-

re, aut contendere ausim; quidquid ad se pertinere quis putat, ultrò resumat, mihi quam quis voluerit partem relinquat, maximo mihi honori erit vel cum Clarissimis Viris consensisse, & quas ipsi speculationes è secretioribus Analyticæ thesauris eruerint, è communibus propemodum, atque in omnium usum patentibus Geometriæ promptuariis, mihi derivasse, rerumque abstrusissimarū facillimas demonstrationes ad omnium captum & gustum accomodasse.

Ad omnium captum, inquam, ad omnium gustum; nec me tamen latet, nostra à paucis legi, à plerisque autem vel nimiæ obscuritatis insimulari, quod potiori jure in hujus libelli conspectu exclamabunt, si vel analytica signa, vel series illæ infinitę in oculos incurrent, quibus has paginas non raró implere coegit Argumenti, quod hic tractamus, natura. Sed spectra sunt hæc trepidantium timore ubi nullus est timor. Quid facilius est, quàm per signum + additionem quantitatis sequentis intelligere, per signum − subtractionem, per notam

tam

tam = æqualitatem, per interpunctionem analogismum, per conjunctionem litterarum ipsarum multiplicationem, per separationem verò, aut interpositionem lineolę, divisionem? Hęc vel vulgaribus Algebristis satis sunt familiaria. At differentialis etiam calculi caracteristicam *dx*, *dy*, ejusdemque differentiandi, & summandi modum quandoque inserui; ita est: utinam in præcedentibus etiam opusculis meis inserere potuissem! at tum ejus methodi arcana mihi erant impervia, nunc ejus usu, fructuque perspecto, quidni inter alias mihi familiares methodos & huic locum facerem? Deinde apertissima est notarum ejusmodi significatio, cum nihil nisi ipsius *x* vel *y* differentiam infinitè parvam significent, calculi autem leges ipsas, si attentè introspexeris, atque hunc tractatum evolveris, data opportunitate expositas facìlè invenies, nisi à Clarifs. Hospitalio in tractatu de infinitè exiguis illas pleniùs explicante reperire volueris. Cæterùm pauca occurrent, quę alia, quam planę Geometrię Elementorum, & nonnulla Coni-

corum

corum cognitione indigeant, ſiquæ verò obſcuriora manſerint, hæc ipſa per ſaltus tranſmiſſa ſequentium lectionem, & intelligentiam non morabuntur. Frequentes, quibus indulgeo, digreſſiones prima vice omittas omnino licebit, ut propoſitionum ad Quadraturas directè pertinentium filum non abrumpas, ſecunda autem vice & hiſce intelligendis operam non inutilem collocabis, cum res ſcitu digniſſimas, & Geometriæ non ſolum, verùm etiam Phyloſophiæ promovendæ aptiſſimas contineant, ut aliquando fortaſse apertiùs demonſtrabo, niſi Lectores mei perſeſe methodum animadverterint. Quod autem ubique paſſim præcedentia opuſcula mea ſuppoſuerim, & doctrinarum in illis expoſitarum veſtigiis, inſtiterim, id mihi nullo, ut arbitror, vitio verti poterit, jure ſiquidem Auctori cuilibet permiſso uſus ſum, quo et in ſequentibus opuſculis uti pergam, ad hunc etiam libellum Lectores meos deinceps amandaturus.

Jam nunc antequàm manum è tabula retraham, illud accuratè in ipſo opuſculi limi-

limine animadvertendum esse decerno, quas hic proposui, & demonstravi, Circuli & Hyperbolæ Quadraturas, non veluti pręcisum illum, & absolutum, definitumque horum spatiorum Tetragonismum me divendere, qualem tanto hactenus studio incassum Geometrę quęsiverunt, quemve irrito, & ridendo conatu Cusani, Bovilli, Orontii, Scaligeri, Portæ, cęterique id genus Scriptores [à Mathematici vocabulo Scientiæ ipsius honor hìc abstinere nos jubet) in se susceperunt, nec illo præsertim sæculo expectandus fuerat, cum Geometrię tot pręsidia deessent, quot postmodum à summis viris ad hujus scientiæ amplificationem excogitata sunt, quibus adhuc, & si maximè abstrusæ veritates Antecessoribus nostris inacessę in aperto jam positæ fuerint, complura tamen addenda supersunt, ad hoc ut Quadraturarum negotium numeris omnibus absolutum sperare possimus. Id autem discriminis interest inter has, & Parabolæ Quadraturam ab Archimede per infinita triangula, ut sub initium monebamus, exhibitam, quod

licet

licet tum nostrę, tum Illa Archimedis per infinitā seriem quadrabilium spatiorum procedant, Illa tamen, quum terminis continuè proportionalibus constaret, in unam summam commodè, & expeditè redigi potuit, quæ præcisam Parabolę Quadraturam definiret, nostræ verò non item, sed valores tantummodò quantumvis accuratos, seu in quęsitam Hyperbolæ, & Circuli Quantitatem ita convergentes, ut differentia infra quamlibet datam continuè extenuetur, prębere possunt, sua quidem facilitate, & generalitate commodos, in sua specie perfectos, pulcherrimamque horum spatiorum proprietatem aperientes, atque eo nomine minimè contemnendos, ulteriori tamen circa ejusmodi spatiorum dimensionem inquisitioni aditum non præcludentes, cui ut incumbant Geometræ, novis scilicet adhuc incompertis methodis Figurarum quadraturas perficiendo, etiam atque etiam hortamur, cum is demum præcipuus Geometriæ scopus, hæc meta sit. Interea, dum non meliora fert Ætas, Hæc damus, *Quæ, etiam si abesset utilitas, propter*

ter ipsas demonstrationes digna sunt, ut recipiantur, multa enim alia in mathematicis disciplinis ob hoc ipsum, & non ob aliquod aliud recipere consuevimus, ut inquit Apollonius Pergæus epist. ad Attalum libro 4. Conicorum præfixa. Vale.



PARS

PARS PRIOR

DE CIRCULO



PROPOSITIO I.

Fig. 1.

SI ratio magnitudinum A B , B C continuetur in infinitum ad minores terminos C D, D E , E F &c. sitque magnitudo A I tertia proportionalis post differentiam primæ A B à secunda B C , & ipsam primam magnitudinem A B ,

Dico ipsam A I æquari aggregato omnium simul infinitorum terminorum A B, B C, D E &c.

POst Archimedem in postrema Parabolæ quadratura id specialiter de ratione quadrupla ostendentem , Primus, quod sciam , id generaliter notavit , ac demonstravit Torricellius *de dimens. Parab. lemm.* 27. mox Cavallerius *in schol. ejusd. lemm.* Hinc Gregorius à Sancto Vincentio , Gua-

rinus, De Chales, aliique variis methodis id comprobantes, quod & nos aliàs fecimus in *Hugenianis cap.* 10. *n.* 3. ut superfluum videri possit hic quidquam addere, nisi gratam nonnullis futuram sperarem novam hanc physicam rationem idipsum confirmandi, quam ob methodi varietatem adjungere non gravabor.

Ex A, & B eodem temporis momento versùs I moveantur duo mobilia K, L, illud quidem velocitate A B, hoc verò velocitate B C; itaque, ob spatia velocitatibus proportionalia, ubi K pervenerit ad B, utique L reperietur in C, eritque mobilium distantia, non jam A B, sed B C secundus terminus progressionis; similiter ubi *K* progresum fuerit ad C, L pervenerit ad D, ubi illud ad D, hoc ad E, atque ita deinceps, ita ut semper aliquis ex terminis propositæ progressionis intercipiatur inter utrumque mobile, quousque decrescente infra quamlibet magnitudiné, simul cum ipsis terminis, mobilium distantia, in fine tandem progressionis utriusque mobilis centrum concurrat. Sit punctum

talis concursus I; ergo magnitudo A I erit aggregatum omnium magnitudinum A B, B C, C D &c. & quia eodem tempore mobile *K* velocitate A B percurrit A I, & mobile L velocitate B C percurrit B I, erit A I ad I B, ut A B ad B C, & per conversionem rationis, ut A I summa omnium terminorum ad primum terminum A B, ita ipse primus terminus A B ad sui excessum supra secundum B C; Quare si ratio magnitudinum &c. Quod &c.

SCHOLION.

EX quò inter utrumque mobile ante concursum intercipiatur semper aliquis ex terminis dictæ progressionis, qui multitudine infiniti sunt, deducebat olim Zeno contra Aristotelem, quòd si quælibet continua quantitas in partes minores, ac minores juxta quamlibet proportionem, in infinitum sectilis esset, numquam Aquila Testudinem, unico licet palmo præeuntem, assequi posset: has philosophicas tricas fœlici saltu prætergreditur Geome-

tria,imò ex hoc Zenonis paralogismo Theorematis hujus longe jucundissimi demonstrationem derivavit, qua & Philosophos docere queat ipsummet temporis, & loci punctum, in quo Aquila ad Testudinem perveniet, si nempe fiat, ut differentia velocitatum Aquilæ, & Testudinis ad majorem Aquilæ velocitatem, ita primum utriusque intervallum A B ad spatium A I, & ita tempus, quo Aquila conficiet primum intervallum A B ad aliud tempus, quo Aquila percurret totam A I, & sic Testudinem assequetur; Zenonis enim ratiocinio non conficitur, quòd absolutè numquam Aquila ad Testudinem sit perventura; sed quòd id contingere nequeat infra temporis, ac loci spatium nuper determinatum; Quod enim infiniti sint termini, quid refert? infinitę etiam temporis particulæ, non quidem æquales, sed perinde minores, ac minores in infinitum iis percurrendis insumentur, ex quibus tam non est timenda infiniti temporis aggregatio, quàm ab ipsismet infinitis terminis percurrendis non est infinita spatii longitudo

tudo speranda. Vide dicta à nobis in *Hugenianis cap. 4. à num. 7.*

PROPOSITIO II.

AB eadem prima magnitudine A duę infinitæ progressiones terminorum continuè proportionalium incipiant, prior A, B, C, D, E &c. posterior A, M, N, P &c.

Dico, aggregatum ex terminis omnibus prioris ad aggregatum ex omnibus terminis posterioris progressionis esse, ut reciprocè prima differentia posterioris ad primam differentiam prioris seriei.

$A\,1;\ B\frac{1}{2},\ C\frac{1}{4},\ D\frac{1}{8},\ E\frac{1}{16},\ F\frac{1}{32}$ *&c.*

$A\,1;\ M\frac{1}{3},\ N\frac{1}{9},\ P\frac{1}{27},\ Q\frac{1}{81},\ R\frac{1}{243}$ *&c.*

EST enim *ex prop. 1.* series A, B, C, D &c. ad primam magnitudinem A, ut ipsa magnitudo A ad differentiam duarum A, B; ipsa quoque magnitudo A est ad seriem omnium A, M, N, P &c. per eandem pro-

 posi-

positionem, & convertendo, ut differentia duarum A, M ad magnitudinem A; igitur ex æquo perturbatè, tota series magnitudinum A, B, C, D &c. ad seriem A, M, N, P, &c. est, ut differentia duarum A, M, ad differentiam duarum A, B. Quod erat &c.

COROLLARIUM.

OMnes itaque series fractionum ab unitate deinceps proportionalium sunt reciprocè, ut earumdem primæ differentię, nempe series suprascripta A, B &c. ad seriem A, M &c. est, ut duo trientes ad semissem, sive ad duos quadrantes, nempe ut 4 ad 3; & reipsa prima æquatur 2, secunda æquatur 1 cum semisse, per tradita *cap.* 4. *Hugenianorum num.* 8. et sic in reliquis.

PROPOSITIO III.

Fig. 5.

E*Sto semicirculus IFK circa diametrum IK, cujus ab altero extremo in alterius extremi tangentem* KG (*pro nunc diametro majo-*

majorem) inclinata IG secet peripheriam in H, unde ordinetur sinus HL, fiatque, ut quadratum G K ad quadratum K I, ita ipsa diameter ad Y N, & hęc ad 1 N, eadem ratione ad infinitos terminos 2 N, 3 N, 4 N &c. prorogata.

Dico, summam ex omnibus horum terminorum differentiis alternè sumptis Y 1, 23, 45 &c. aequalem esse sinui verso I L intercepti arcus I H.

QUoniam proportionalium differentiæ omnes continuè sumptę Y 1, 12, 23, 34 &c. sunt in eadem ratione proportionales, eædemque interpolatim acceptę Y 1, 23, 45 &c. iterum continuè proportionales in duplicata priorum ratione, habebimus duplicem seriem proportionalium ab eodem primo termino Y 1 incipientium, quare *per propos. praeced.* aggregatum ex omnibus terminis prioris seriei Y 1, 12, 23, 34 &c. (nempe ipsa Y N his omnibus æqualis) ad aggregatum ex terminis omnibus posterioris serieri Y 1, 23, 45 &c. erit, ut differentia duarum Y 1, 23 ad differentiam duarum Y 1, 12, est autem differentia duarum Y 1, 23 æqualis duabus simul diffe-

rentiis Y 1 ab 12, & 12 à 23, igitur ut aggregatum ex duabus differentiis duorum continuè proximorum terminorum ad majorem ejusmodi differentiarum, sive, ob analogiam terminorum proportionalium cum suis differentiis, ut aggregatum ex duobus terminis continuè acceptis ad majorem ipsorum, nempe ex constructione, ut duo simul quadrata GK, *K*I, vel ut unicum quadratum G I ad quadratū G *K*, hoc est ut I G ad G H, propter angulum IHK in semicirculo rectum, ita Y N ad dictā seriem; estque diameter I K ad eamdē Y N ex hypothesi, ut quadratum G K ad K I, idest ut G H ad H I; igitur ex æquo perturbatè erit diameter I K ad posteriorem seriem differentiarum alternè sumptarum Y 1, 23, 45 &c. ut I G ad H I, nempe ut eadem I K ad I L; æqualis est ergo ejusmodi series sinui verso I L. Quod &c.

PROPOSITIO IV.

I*Isdem positis ordinetur G D diametro I K parallela, æqualis autem ipsi I L, atque hoc semper fiat, quousque per puncta D, d sic inven-*

inventa in qualibet gd ordinata ad tangentem KG, transeat curva DdSQI:

Dico, spatium DdSQIKG ad partes G infinitè extensum duplum esse quadrantis IKB radio IK descripti, & singulas portiones GDdg duplas sectoris correspondentis MIm iisdem secantibus à centro ad puncta G, g deductis intercepti.

Concipiantur enim duæ secantes IG, Ig fieri infinitè proximę, uti & duæ ordinatæ GD, gd, quomodo spatiolum GDdg pro rectangulo ex GD in gG haberi poterit, nec arculus per has secantes è semicirculo interceptus Hh à recta ejus tangente, vel subtensa sensibiliter differet; cùm verò rectangula GIH, gIh eidem quadrato diametri IK, adeòque & inter se sint æqualia, erit GI ad Ig, ut Ih ad IH, & triangula GIg, hIH, communem angulum I habentia, similia erunt, unde Gg ad Hh erit, ut GI ad Ih, vel ad minimè comparabiliter differentem IH, idest ut KI ad IL, vel MI ad GD per constructionem; est autem Hh æqualis arcui Mm,

cum

cum sint differentiæ arcuum æqualium MK, HK; mK, hK, igitur est Gg ad Mm, ut MI ad GD, & rectangulum DGg, idest spatiolum D$d$$g$G, æquabitur rectangulo IMm, seu duplo sectoris IMm; quod cùm ubique, & semper eveniat, manifestum est, quodvis spatium per duas ad tangentem kG ordinatas ab hac curva resectum esse duplum sectoris circuli correspondentis, necnon totum spatium DdSQIKG ad partes G infinitè protensum duplum quadrantis IBk, seu quadruplum semicirculi IHk. Quod erat &c.

COROLLARIUM I.

Bifariam secto angulo BIk per lineam IV pariter bisecantem arcum, & sectorem in T, ordinetur VS: manifestum est, totum spatium infinitè longũ DdSVG æquale fore quadranti BIk, utpote duplum sectoris BIT, quemadmodùm & portio VSQIK eidem quadranti æqualis erit, ut pote dupla ipsius TIK.

CO-

COROLLARIUM II.

ORdinata ad axem I k recta D P, erit segmentum D S Q I P quadruplum segmenti K *b* H, quia cùm sit G k ad k I, ut H L ad I L, seu G D, rectangulum kGDP æquale erit rectangulo ex I k in H L, sive duplum erit trianguli k H I, spatium autem G D S Q I k duplum est sectoris M I k *per hanc prop.* residuum ergo spatiũ D S Q I P duplum erit residui semisegmenti M H k, sive quadruplum segmenti k *b* H, vel [si junctam fingas I O] quadruplum æqualis segmenti I H O, nam P R æqualis D G æquatur ipsi I L, & H L æquatur O P, & arcus I H ipsi k O.

COROLLARIUM III.

UNde constat, quòd solidum ex spatio D S Q I k G ad partes G infinitè longo circa asymptoton k G revoluto æquale est duobus annulis à semicirculo k F I circa eandem k G revoluto progenitis, nam rectangulum G D P *k* ostensum est æquale I k

in H L,

in H L, vel O P, ideſt ęquale duobus O P k, O P I rectangulis, quarè cylindrica ſuperficies à recta D P genita in primo ſolido ęquabitur duabus cylindricis ſuperficiebus ab O P circa G k revoluta, & ab H L circa B I rotata deſcriptis, ſive ſolidum illud infinitè longum ex D S Q I K G circà K G æquabitur annulo ex ſemicirculo I F k circa G k, & annulo ex eodem circa B I, ſive duobus annulis ab ipſo circa eandem G K rotato progenitis, vel ei, quod ab integro circulo radii C K circa tangentem k G revoluto deſcriberetur, ſolido annulari.

COROLLARIUM IV.

Hinc ſi ordinata D P biſecet radium in P, erit in ipſa D P centrum gravitatis ſpatii totius infinitè longi, diametro, aſymptoto, & curva I S D comprehenſi, nam ejus centri gravitatis diſtantia ab aſymptoto debet eſſe ſubdupla radii, quo diſtat C centrum gravitatis circuli ab eadem aſymptoto, utì hic circulus ęqualis eſt quadranti radio B I deſcripto, adeòque ſubduplus

duplus spatii DSI κ G ad partes G infinitè protensi, cum debeant per *Coroll. praeced.* sua rotatione circa asymptoton solida aequalia producere.

COROLLARIUM V.

SI aliquam ex curvis per V transeuntibus, velut V 4 4 concipias esse Hyperbolam Apollonianam asymptotis BI, IC descriptam, erit, ut spatium recta VB, asymptoto BN, & curva hyperbolica V 4 4 infinitè protensa interiectum ad quadratũ VBI, ita solidum ex spatio DSQI κ G ad partes G infinitè longo circa asymptoton rotato ad cylindrum ex quadrato VBI, & portio ex dicto spatio hyperbolico versùs partes V resecta per ordinatam in puncto L asymptoto IN parallelam, erit ad equè altum rectangulum V κ L, ut solidum ex DSQIP circa IP ad cylindrum rectangulo BIP circa eandem IP revoluto progenitum, cùm sit enim quadratum GI ad quadratum I κ, ut GI ad IH, vel κ I ad IL, sive ut ordinata per L ad Hyperbolam

lam, ipſi V K parallella, ad V K, erit dividendo, ut exceſſus dictæ ordinatæ ſupra V K ad ipſam V K, ita quadratum G K ad quadratum diametri, vel circulus D P ad circulum B I, unde methodo indiviſibilium conſtat propoſitum, ſimulque patet, ſpatium integrum D Q I K G ad partes G infinitè quidem longum, ſed finitæ tamen dimenſionis, rotatione ſua circa I K ſolidum producere verè infinitum, etiamſi per unicum ex minutis decimis dumtaxat converti intelligeretur; quomodo patet veritas penultimi ex illis paradoxis, quę *in præfatione Vivianeorum Problematum pag.* 2. dudum propoſui, cujuſque Exemplum non nemo queſtus erat apud Geometras deſiderari, de ſuperficie ſcilicet finita, quę ſi tantillum moveatur ſolidum procreet verè infinitum: quamquàm id oſtendi facilè poteſt locum habere & in hyperbolarum ſpeciebus infinitis qua parte determinatæ ſunt quantitatis, ſi circa eam, quæ aplicatis parallella eſt, aſymptoton convertantur, itemque in ciſſoide circa diametrum circuli genitoris revoluta, &c.

CO-

COROLLARIUM VI.

QUoniam ostensum est, Gg differentiam tangentis Gk ad Hh differentiam arcus IH esse, ut kI ad IL, additis utrobique æqualibus rationibus, Hh ad LI, & CH ad HL, conficietur ratio Gg ad LI (differentiam ordinatarum DG) æqualis compositæ ex kI ad IL, & HC ad HL, ideſt ut dimidium quadrati Ik [seu rectangulum ex Ik in radium HC] ad rectangulum HLI, sive ut quadratum radii HC ad triangulum HIL, ita CG ad differentiam ordinatarum GD, adeòque & subtangens curvę Dd in asymptoto accepta ad ordinatam GD in eadem ratione erit; Quapropter illa subtangens erit tertia proportionalis post duplam HL & diametrum Ik, sive æquabitur portioni tangentis semicirculum in H, quę interciperetur utraquę ad extrema diametri tangentę kG, IB; quod aliquando adnotasse profuerit.

SCO-

SCOLION I.

Quoniam, tangentis hujus curvę incidit mentio, non ingratum Lectoribus meis futurum arbitror, si paululum ab instituto digrediens generalem methodum inseram determinandæ tangentis Infinitarum Curvarum similem descriptionem suscipientium, ut enim in hac curva ordinatę G D, k I reciprocè proportionantur quadratis ramorum k I, I G ab eodem fixo puncto I ad eadem axis puncta eductorum, sic ubi ordinatarum potestates quælibet ab exponente *n* indicatæ vel directè, vel reciprocè proportionarentur ramorum potestatibus per exponentem *m* denominatis, infinitæ curvæ D S I oririentur, in quarum censum etiam Sectiones Conicæ venirent, generali ęquatione $\overline{aa + yy}^{\frac{m}{2}} = a^{m \mp n} x^{\mp n}$ comprehensæ [intellecta constanti I k per *a*, G k per *y*, G D per *x*, & ambiguo signo $\mp$ obtinente superiorem valorem in directa, inferiorem in reciproca potestatum comparatione) subtangens verò in asymptoto accep-

accepta ſemper foret $\frac{n}{m}$ tertiæ proportionalis poſt G K, & G I, ideſt $\frac{n\,\overline{aa + yy}}{m\,y}$ accipienda quidem ſupra ordinatam G D in eadem aſymptoto G K, ubi fuerit comparatio directa; infra verò talem ordinatam, ubi reciproca; ſemper enim, cùm relatio curvæ naturam exprimens invertitur, eadē ſubtangens tranſit ad partes contrarias, ut infinitarum parabolarum, & hyperbolarū exemplo, aliiſque ſimilibus conſtare poteſt. Analyticam hujus determinationis demonſtrationem Leibnitziana methodo ſic breviter habe: differentiando propoſitā æquationem ejuſmodi curvarum, elicitur $dx =$

$$\frac{m\,y\,\overline{aa + yy}^{\frac{m-2}{2}}\,dy}{n\,a^{m \mp n}\,x^{\pm n - 1}}$$

quæ reducta juxta valores terminorum ab æquatione curvę deſumptos, dat $dx =$

$$\frac{m\,y\,x\,dy}{n\,\overline{aa + yy}}$$

 unde

unde $\frac{xdy}{dx}$ (valor generalis ſubtangentis in qualibet imaginabili curva) erit in noſtro propoſito = $\frac{n}{m}\ \frac{aa + yy}{y}$. Quod erat &c.

Itaque in curva hìc adhibita DSQI, ubi ſimplices ordinatę reſpondent ramorum quadratis reciprocè ſumptis, ſubtangens = $\frac{1}{2}$ tertiæ proportionalis poſt Gk, & GI (quod coincidit cum determinatione *Coroll.* 6. nuper adducta) ſi quadrata ordinatarum reſponderent ramorum cubis eſſet ſubtangens = $\frac{2}{3}$ dictę proportionalis, & ſic deinceps. Ubi ordinatæ ipſis ramis directè proportionales forent, curva IQD tota ultra lineam IN ſe extenderet, cui & convexitatem obverteret, eſſet autē nil aliud, quàm hyperbola ordinaria, cujus centrum K, ſemitranſverſus axis kI, & huic conjugatus kG; ſi ordinatę directè reſponderent ramorum quadratis, fieret parabola ordinaria circa axem kI ſupra I productam, cujus latus rectum eadem kI: nam ſupe-

ſuperiùs adducta generalis æquatio harum curvarum in primo caſu evaderet $x = \overline{aa + yy}^{\frac{1}{2}}$, quæ eſt equatio ad hyperbolam, in caſu ſecundo fieret $ax = aa + yy$, quæ eſt ad parabolam: Itaque tangentes ex hoc generali calculo deductas potes cum Apollonianis conſtructionibus comparare.

SCHOLION II.

QUando ſemel aperta eſt in diggreſſiones via, quid vetat ne in ſatis obviam de intenſionibus contemplationem divertamur? Summa huc redit, Figuram DSQIkG, in hac propoſitione conſideratam, adhiberi poſſe pro *Scala Intenſionum* infinitæ lineæ KG, per idem irradians punctum I lumine colluſtratę (voco ſcilicet Scalam Intenſionum eam figuram, quæ ſuis ordinatis repręſentat gradus intenſionum ejuſdem illuminationis in punctis quibus applicantur) notum eſt enim, intenſionem in G ad intenſionem in *K* eſſe in-

duplicata ratione distantiarum K I, I G reciprocè sumptarum [non ea quidem ratione, quam *Opticæ lib.* 3. *prop.* 4. adducit Cl. De Chales, nam ibi supponitur eadem inclinatio, quæ hìc non servatur, atque ibi ad superficiem, hìc ad simplicem lineam est illuminatio, sed quia decrescit lumen in G, tum ratione distantię majoris, adeòque in reciproca ratione *K* I ad I G, tum ratione inclinationis radii I G, quæ sequitur proportionem sinuum angulorum I G K, & ideò ad intensionem perpendicularis incidentiæ I *K* est rursus, ut I *K* ad I G, ob latera sinubus oppositorum angulorum proportionalia) sed & I L, seu G D ad I K est in duplicata ratione ipsarum I K, I G, quippe ut H I ad I G, ergo si linea I *K* repręsentet maximam perpendicularis radii K I in vicinissimo puncto *K* intensionem, linea G D repræsentabit intensionē puncti G remotioris ab inclinato radio I G causatam, & sic luminis intensio in infinita linea *K* G decrescet juxta rationem ordinatarum hujus curvæ, quam ideò Scalam ejus *Intensionis* meritò appellamus.

Hinc

Hinc nova demonſtratione phyſica confirmari poſſet æqualitas ſpatii infinitè longi D*d*I*K*G, & cujuſvis ejus portionis cum duplo quadrantis, aut ſectoris correſpondentis, cùm enim puncta ſingula peripherię *K*MB ſint æquè diſtantia à Luminoſo I, & radiis IM perpendiculariter occurrentia, eorum intenſio ubilibet exponetur per conſtantem lineam IK, eritque rectangulum ex ipſa I*K* in peripheriam KMB, vel quālibet ejus portionē MT, Scala æquabilis intensionis luminis per ipſam diffuſi; ſunt autem Schalæ intenſionum [cęteris paribus) ut quantitates Luminis, adeòque cùm eadem ſit Luminis quantitas, ſcilicet idem radiorum numerus intra angulum GIV, tangentis portionem GV, afficiens, atque illuſtrans arcum MV (nec non infinitam KG, & totum kMB) conſequens erit, Scalas utriuſq; intensionis æquales eſſe.

Ecce alterum Exemplum, ut methodus illuſtretur. Semicirculum IHFk, ejuſque diametrum Ik illuſtrent paralleli radii, ſive à puncto infinitè diſſito provenientes, BI, Q*bl*, SFC, DOP, Gk &c. manifeſtū

 eſt,

eſt, omne diſtantiæ diſcrimen evaneſcere, omnemque adeò intenſionis differentiam penes variam inclinationem radiorum deſumendam eſſe, cùmque ad eundem [ſive rectum, ſive acutum) angulum hi radii diametrum afficiant, non ſic verò peripheriam I H F O K, erit æquabilis intensionis productæ in I K Scala rectangulum ex ipſa I K in radium, vel ſinum anguli conſtantis, ad quem radios excipit, Scala verò inæquabilis intensionis diffuſę per I H F O K erit factum ex ſinubus H L, F C, O P &c. applicatis ad reſpectiva peripheriæ puncta H, F, O, quippe quibus proportionantur gradus intenſionis ab inclinatione angulari radiorum, cui correſpondent, producti, cùmque utraque intenſio ſit ab eadem radiorum quantitate, erunt prædictæ Scalæ ęquales, nec non correſpondentes utriuſque partes ſemper æquabuntur, videlicet rectangulum ex radio F C in L P æquabitur facto ex omnibus ſinubus H L, F C, O P erectis ſuper correſpondente arcu H F O.

Quod apprimè conſonat his, quæ de Ungulę Cylindricæ dimenſione tum ab aliis, tum

tum à nobis *in Vivianeis* sunt demonstrata, idemque aplicari posset cuilibet alteri curvæ V y, vel V 4 iisdem radiis interpositæ, modò ad ipsam curvam erigerentur ubique sinus inclinationis radiorum super tangentes punctorum correspondentium.

Similiter si iidem radii paralleli B I, S F, D O totam superficiem hemisphenii ab I HF circa F C geniti illustrare intelligantur, scala intensionis habebitur, complanata hemisphérica superficie (modo *in Vivianeis* tradito *in Schol. prop.* 3. ut scilicet semiperipheriæ ex sinuum conversione descriptę ordinentur arcui I H K in rectam extenso ad puncta correspondentia) erectisque in singulis punctis H sinubus H L, repręsentantibus gradus intensionũ correspondentium, unde quoddam solidum resultabit, cujus naturam facilè concipies, si complanatam figuram sinuum solius quadrantis I H F ducas in dictam hemisphericam superficiem expansam subcontrariè positam, intelligesque ejusmodi solidum æquari cylindro, cujus basis eadem, quæ hemispherii, & altitudo æqualis radio F C, designanti

conſtantem gradum ęquabilis intenſionis reſultantis in plano dictæ baſis hæmiſpherii per eoſdem radios illuſtratæ.

Rurſus. Concipiatur lumen in A (*fig.* 6.) per radios à ſe divergentes illuſtrare ſibi oppoſitam planam ſuperficiem ſuper B C erectam, nec non ſibi concentricam sphericam ſuperficiem B F K, quam æquabili intenſione ubilibet illuminabit. Cogitemus ergo [lubet enim & hujus methodi ſpecimen tyronibus conſultò aperire, & ſi aliunde minimè neceſſarium in re ſatis obvia] luminis conulum ſcalenum C A *c*, cujus baſis portiuncula infinitè exigua plani illuſtrati, ellipſis nimirum, cujus majuſculus axis C *c*, ſitque D *d* portiuncula ſphericæ ſuperficiei prędictę, ſeu potius circellus infinitè parvus diametri D *d*, ejuſdem coni lateribus interceptus, cui parallelus alius circulus circa diametrum *c* E, portiuncula ſcilicet alterius ſphericę ſuperficiei concentricę, eundem coni angulum ſubtendentis. Erit ergo intenſio in C *c* ad intenſionem in D *d* reciprocè, ut circulus diametri D *d* ad ellipſim majoris axis C *c*, ideſt in ratione

com-

composita ex rationibus, circuli D*d* ad circulum *c* E, & hujus ad dictam ellipsim; quarum rationum prima est eadem, quæ quadrati D A, seu A B, ad quadratum A C, secunda eadem, quę *c* E ad C *c* [alter enim ellipseos minor axis æquatur ipsi *c* E, vel ab eo non nisi infinitè exiguo secundi ordinis intervallo differt) hoc est quæ rursus A B ad A C; quarè intensio in C *c* ad intensionem in D *d* (vel ad ęqualem, quæ in B] est ut cubus B A ad cubum C A, nempe reciproca cubis distantiarum.

Hoc intellecto [*redi ad fig.* 5.] supponatur lumen I eodem modo irradiare in planum super k G erectum, cùmque sciamus, intensionum gradus reciprocos esse, non jam quadratis, sed cubis distantiarum à puncto luminoso, fiat curva I Q S D, cujus ordinatę G D, V S reciprocæ sint cubis V I, G I, eaque circa I k revoluta producatur solidum basis infinitæ, cujus radius ipsa asymptotus K G, eritque ejusmodi solidum æquale cylindro, cujus basis æquetur hemisphericæ superficiei ex quadrante B I k genitæ, altitudo verò æqualis radio

I K,

I k, ideſt æquale duplo cylindri ex quadrato B k, nam ſolidum illud erit ſcala intenſionis indefiniti plani circularis ex converſione ipſius k G progeniti, ille verò cylindrus ſcala æquabilis intenſionis ab eadem radiorum quantitate in hemiſphericam ſuperficiem ex quadrante K M B genitam traductę.

Denique lumen in I exiſtens irradiet in ſuperficiem ſphericam I H O k, erunt intenſiones reciprocæ ſimplicibus diſtantiis à luminoſo, nam intenſio in portiuncula M *m* ſuperficiei concentricæ B k ad intenſionem portiunculæ H *h* ſuperficiei primò propoſitę eſt reciprocè, ut extenſio hujus ad extenſionem illius, nempe, ut ellipſis diametri H *h* intra conum luminis M I *m* concluſa ad circulum æqualis diametri M *m* (ſunt enim hæ diametri ipſæ differentiæ æqualium arcuum H k, M k] videlicet ut alter axis ejuſdem ellipſeos priori conjugatus ad diametrum M *m*, ſive ut H I ad I M, quarè etiam intenſio in K ad intenſionem in H erit, ut H I ad I k, vel ut I K ad I G, quarè Scala intenſionis æquabilis ſphe-

ricę

ricæ ſuperficiei concentricæ B M k exiſtente cylindro, baſim habente eandem hemiſphericam ſuperficiem complanatam, & altitudinem radio I K æqualem, ſcala intenſionis ſphericę ſuperficiei I H k erit ſolidū proveniens ex hac ipſa ſuperficie in planum redacta, erectis ubique ad puncta H altitudinibus ſecantium I G, atque hoc ſolidum eidem cylindro æquale idcirco probabitur, &c.

Habes hìc, ut arbitror, quo totum phyſicomathematicum de Intenſione argumentum [aliaſque ſimiles materias per methodi imitationem) vel illuſtrare, vel reformare poſſis, nec ad arduas Geometriæ veritates ſcandere ejuſmodi ſcalarum adminiculo tibi inutile fuerit, modò à præcipitiis tibi caveas.

PROPOSITIO V.

Per punctum V quadrati B I K V inter communes aſymptotos B I, I K tranſeant infinitę hyperbolæ V y Y, V 1 1, V 2 2, V 3 3 &c. quarum ordinatæ ad alteram aſymptoton I B N reſpon-

respondeant potestatibus abscissarum à centro I per singulos deinceps pares numeros denominatis, videlicet, ut quadratum N I ad quadratum B I, ita sit B V ad Y N, & ut biquadratum N I ad biquadratum B I, ita rursus B V ad 1 N, itemque ut sexta potestas N I ad similem B I, ita B V ad 2 N, atque ita porrò.

Dico, Circulum diametri K I æqualem esse omnibus simul hyperbolicis spatiis Y y V 1 1, 2 2 V 3 3, 4 4 V 5 5 &c. idest differentiis alternè sumptis dictarum hyperbolarum.

MAnifestum est enim, lineas 1 k, seu B V, & Y N, 1 N, 2 N, 3 N &c. esse continuè proportionales in ratione quadrati N I, ad I B, seu G K ad k I, nam ejusmodi posita fuit proportio primæ ad secundam, primę verò ad tertiam duplicata, ad quartam triplicata, ad quintam quadruplicata prioris, ob indices potestatum abscissarum, quibus respondent, per eandem binarii differentiam arithmeticè crescentes, ergò *per propos.* 3. erit ubilibet sinus versus I L arcus correspondentis I H, vel ipsamet G D ordinata ad curvam D S Q I, de qua *in prop.* 4.

æqua-

æqualis omnibus simul proportionalium ejusmodi differentiis alternè sumptis Y 1, 2 3, 4 5 &c. & hoc semper: quarè totum spatium D S V G ex prędicta curva ad partes D G infinitè longum æquabitur omnibus numero, & longitudine infinitis hyperbolarum differentiis alternis Y *y* V ₁ 1, 2 ₂ V ₃ 3, 4 ₄ V ₅ 5 &c. quarè cùm *per coroll.* 1. *prop.* 4. quadrans B k I, seu Circulus diametri I k sit æqualis spatio infinitè longo D S V G, æquabitur dictus Circulus propositis hyperbolicis differentiis. Quod erat &c.

COROLLARIUM I.

IDem obtinet de partibus, quòd nempe infinitæ portiones ex iisdem supra designatis hyperbolarum differentiis, putà Y *y* ₁ 1, 2 ₂ ₃ 3, 4 ₄ ₅ &c. æquales sint spatio G *g d* D, seu duplo sectoris correspondentis M I *m*.

COROLLARIUM II.

CUmque tum integra illa hyperbolica spatia sint quadrabilia ex generali doctrina

ctrina, quam dedimus *in Hugenianis cap.* 8. *n.* 11. tum quælibet eorum portiones sint propterea notæ dimensionis, erunt & integrorum, & partium differentiæ noto rectangulo æquales, unde & circuli, & sectoris cujuslibet quantumvis vero proxima quadratura, & dimensio geometricè innotescet; quod ampliùs sequenti propositione manifestum fiet.

PROPOSITIO VI.

Quadrato diametri Circuli existente 1. *erit ipse Circulus* =

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \text{ \&c.}$$

alternatim additis, detractisque singulis fractionibus, quibus unitas per impares numeros ex ordine acceptos denominatur.

HÆc est celeberrima Summi Geometræ Leibnitzii Quadratura, quę ex positis principiis sic brevissimè ostenditur: Per dicta *loco citato Hugenianorum* quodlibet hyperbolicum spatium est inscripti rectanguli

guli, ideſt in propoſito quadrati VBIK, talis pars, qualem deſignat fractio $\frac{x}{y-x}$, exprimente x gradum ordinatarum [qui hic eſt unitas] & y gradum abſciſsarum (qui eſt quilibet par 2. 4. 6. 8. &c.) adeòque primum hyperbolicum ſpatium eſt $\frac{1}{2-1}$, ſecundum $\frac{1}{4-1}$, tertium $\frac{1}{6-1}$, atque ita deinceps, nempe $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ &c. Circulus ergo, qui *per prop. præced.* æquatur differentiis dictorum ſpatiorum, poſito quadrato diametri Ik pro unitate, fiet æqualis $1 - \frac{1}{3}, + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}, + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION I.

ANalyticè id totum ſic expediri poterat. Poſita diametro Ik $= a$, & indeterminata Gk $= x$, erit GD ordinata ad curvam DSQI, de qua *in prop.* 4 $= \frac{a^3}{xx + aa}$ ideſt per doctrinam expoſitam *in* Huge-

Hugenianis capite 10. *numero* 5. æqualis
$\frac{a^3}{xx} - \frac{a^5}{x^4} + \frac{a^7}{x^6} - \frac{a^9}{x^8} + \frac{a^{11}}{x^{10}}$ &c.
Sunt autem hę ipsæ expressiones ordinatarũ ad infinitas hyperbolas, quarum gradus in abscissis crescant juxta numeros pares, ut constat; quęlibet ergo ordinata GD æquivalebit differentiis ordinatarum ad infinitas illas hyperbolas, adeòque & spatium figuræ ab hac curva DSQI comprehensę idest sector circuli correspondens, æquabitur infinitis differentiis prædictarum hyperbolarum; seu differentiis fractionum per impares numeros denominatarum, taxato valore ipsius *aa* pro unitate; Quod est propositum.

SCHOLION II.

SIc instituto meo Circulum *per Infinitas Hyperbolas* Quadrandi satisfęcisse me arbitror; superest, ut idem *per Infinitas Parabolas* moliri aggrediar; quod tamen longè compendiosiùs exequi dabitur.

PRO-

PROPOSITIO VII.

S*I fiat* (Fig. 7.), *ut quadratum diametri I k ad quadratum tangentis k G [diametro jam minoris] ita ipſa diameter, vel ei ęqualis Y G ad* 1 G, *& hæc ad* 2 G, *eadem ratione ad infinitos terminos* 3 G, 4 G, 5 G *&c. prorogata.*

Dico, ſummam ex omnibus horum terminorum differentiis alternè ſumptis Y 1, 23, 45 *&c. æquales eſſe ſinui verſo I L arcus I H per ſecantem I G intercepti.*

HOc probabitur *ut in prop.* 3. (loco Y N legendo Y G] uſque ad verba *vel ut unicum quadratum G I ad quadratum G k*, pro quibus ſic proſequere: vel ut unicum quadratum G I ad quadratum I k, nempe ut G I ad I H, vel k I ad I L, ita Y G ad ſeriem ejuſmodi differentiarum alternè ſumptarum; eſt autem K I æqualis Y G ex hypotheſi, igitur & I L prędictis omnibus ſimul differentiis æquatur. Quod erat &c.

COROLLARIUM I.

EAdem constructione facta ad singula puncta G tangentis V k, manifestum est, lineas Y G completuras quadratum V k *i b*, et lineas G 1 trilineum parabolæ quadraticę *b* 1 K, lineas autem G 2 trilineum parabolæ biquadraticæ *b* 2 K, & lineas G 3 similiter esse ad parabolam quadrato cubicam, atque ita deinceps reliquas esse ad altiores parabolas, quarum dignitates V *K*, G k omnibus ex ordine paribus numeris denominantur, sic enim prorogatur ad infinitos terminos proportio Y G ad 1 G, quæ ab initio posita fuit duplicata ipsius V k ad k G.

COROLLARIUM II.

QUoniam ergo ordinata G D ad curvam I D S *prop.* 3. descriptam æquatur semper sinui verso correspondenti I L, manifestum est, ipsam quoque G D æquari prædictis proportionalium differentiis alternè sumptis, adeòque & spatium V S D I k ęquari spa-

ri ſpatio parabolico $b\,1\,K\,i$, & parabolicis lunulis $b\,2\,K\,3\,b$, $b\,4\,K\,5\,b$ &c.

COROLLARIUM III.

EX quo ubique YG – 1G † 2G – 3G † 4G – 5G &c. æquetur ordinatæ GD, conſtat, etiam bV – bV † bV – bV † bV – bV &c. æquari VS, ideſt eandem lineam infinities poſitam, & infinities ſubtractam relinquere ſui medietatem.

PROPOSITIO VIII.

Q*Uadraturam Circuli* prop. 6. *propoſitam, iterum per Infinitas Parabolas demonſtrare.*

EST enim circulus circa diametrum Ik, vel quadrans kMB, *per Coroll.* 1. *prop.* 4. æqualis ſpatio VSDIk, nimirum *per Coroll.* 2. *prop.* 7. æqualis $b\,1\,K\,i$, † $b\,2\,k\,3\,b$, † $b\,4\,K\,5\,b$, &c. hoc eſt quadrato $b\,i\,k\,V$, minùs trilineo parabolæ $b\,1\,k\,V$, plus trilineo ſecundæ Parabolæ, minùs trilineo tertię &c. ſunt autem illa trilinea parabolica circum-

ſcripti quadrati $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$ &c. per ordinem, ut patet ex dictis *cap.* 8. *Hugenianor. n.* 10. ergo poſito eodẽ quadrato $= 1$, prodit circulus $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

QUoniam parabola *b* 1 K *i* inſcriberetur quadranti I B M *K*, aliæque eumdem quadrantem circumplecterentur, patet, exceſſum quadrantis ſupra inſcriptam parabolam æqualem eſſe Lunulis parabolicis *b* 2 k 3 *b*, *a* 4 k 5 *b* &c. eidem quadranti adſcriptis.

COROLLARIUM II.

NEc minùs eadem methodo patet dimenſio cujuſvis ſectoris, putà ejus, cujus ſemiſſis eſſet M I K, quippe eſſet ille æqualis *y* 1 K *i* † 2 K 3 † 4 *K* 5 &c. unde patet Veritas Quadraturæ Circularis ſectoris

ab eo-

ab eodem Cl. Leibnitzio propositæ in Actis Lipsiæ 1691. mense Aprilis, pro qua & sequentem Propositionem libet adjungere.

PROPOSITIO IX.

Circularis vel Elliptici Sectoris Quadraturam loco mox laudato à Summo Geometra exhibitam demonstrare.

Sit [*in fig. 6.*] radius $AB = 1$, tangens $BC = x$, arcus circuli $BD = y$, ducta infinitè proxima secante Adc, cum arcu cE concentrico, ponatur $Dd = dy$, undè $Cc = dx$, secans $AC = \sqrt{1 + xx}$. Jam Dd ad Cc est in ratione composita ex Dd ad Ec (idest 1. ad $\sqrt{1 + xx}$) & Ec ad Cc [nempe rursus 1 ad $\sqrt{1 + xx}$) adeòque est ut 1 ad $1 + xx$, nempè ut quadratum radii ad quadratum secantis; ergo cum sit $1 + xx . 1 :: dx . dy$, erit hęc $= \frac{dx}{1 + xx}$ videlicet per dicta *in Hugenianis cap.* 10. *n.* 5. $=$ differentiæ seriei $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$ &c: undè hæc ipsa series ęquabitur inte-

 grę

græ y, ductaque alia tangente CF, ut arcus B F sit duplus B D, & sector B A F æqualis rectangulo radii in semiarcum B D, fiet ejusmodi sector $= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ &c. quæ est Quadratura Leibnitzii loc. cit.

Et quoniam, ubi sector BDFA sit quadrans Circuli, angulus B A C semirectus evadit, & tangens B C æquatur radio B A, nempe ipsa $x = 1$, tunc series prefata mutatur in hanc simpliciorem, videlicet

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \text{ \&c.}$$

qualem *prop.* 6. *&* 8 jam demonstravimus.

Ellipsi autem B O L circa eandem transversam diametrum posita cum circulo BFk, quia tam segmentum B F *l* ad B O I, quàm triangulum F I A ad O I A, adeòque & sector B F A ad sectorem B O A est in ratione F I ad I O, seu *K* A, vel B A ad A L, nec non tangentis C B ad B H, utique si non jam A B, sed A L sit $= 1$, & A B $= a$, nec jam BC, sed BH $= x$, prodibit idē sector ellipticus BCA $= ax - \frac{ax^3}{3} + \frac{ax^5}{5} - \frac{ax^7}{7}$ &c.

ut

ut Maximus qvi nostri Geometra sępe citato loco determinavit, nosque demonstrandùm susceperamus.

SCHOLION.

Restat, ut cùm similem seriem de sectore hyperbolico ibidē Vir Cl. dederit, nos illam demonstrare non differamus, quod post expositas nostras de Hyperbola per Infinitas Hyperbolas,& Parabolas quadranda cogitationes, præstabimus, ad id nos invitante olim, nostrasque curas promovente Egregio Juvene Gabriele Manfredio, cujus doctissimam hac de re Epistolam tum in medium adducam, quam ferax sit Ingeniorum ad Geometriam, & Analysim factorum Italia, locupletissimo apud Exteros testimonio futuram.

EPIDOSIS.

Antequàm ad alteram Libelli partem progrediar, oportunum duxi aliàs vacaturum hujus pagellæ residuum implete, adducta demonstratione veritatis supra

enunciatæ *pag.* 30. *ad finem* de Solido Infinito ex Cissoide circa diametrum circuli genitoris revoluta: hoc enim nullo schemmate adhibito (quæ methodi Leibnitzianæ præstantia est) ex sola hujus curvæ natura demonstrare possum, posita scilicet diametro $= a$, parte abscissa ab initio Cissoidis $= x$, & circumferentia genitoris circuli $= c$; erit enim $a - x . x :: \frac{cxx}{a}$ [nempe circulus radii x] . $\frac{cx^3}{aa - xa} =$ circulo descripto ab ordinata Cissoidis, quo ducto in dx, prodit $\frac{cx^3\,dx}{aa - xa}$ elementum solidi ab ejusmodi revolutione producti, & hoc resoluto in seriem infinitã *per cap.* 10. *n.* 5. *Hug.* habetur $\frac{cx^3\,dx}{aa} + \frac{cx^4\,dx}{a^3} + \frac{cx^5\,dx}{a^4}$ &c. cujus integrale $\frac{cx^4}{4aa} + \frac{cx^5}{5a^3} + \frac{cx^6}{6a^4}$ &c. $=$ solido altitudinis x; & ubi $x = a$ fit integrũ solidum $\frac{caa}{4} + \frac{caa}{5} + \frac{caa}{6}$ &c. $=$ Infinito, ob denominatores arithmeticè dispositos.

PARS

PARS ALTERA
DE HYPERBOLA



PROPOSITIO X.

Fig. 8.

INter asymptotos BCG per idem punctum A descriptæ sint infinitæ Hyperbolæ AEF prima, seu linearis ab Apollonio illustrata, A 11 secunda, seu quadratica, quæ Cl. Viviano Mesolabica dicebatur, A 22 tertia, seu cubica, A 33 biquadratica, aliaque altiorum graduum in infinitum, quas secet alteri asymptoto parallela E 1 2 3 G

Dico ipsas AD, EG, 1 G, 2 G, 3 G &c. esse continuè proportionales in ratione G C ad CD.

NAm ut GC ad CD, ita AD ad EG in prima hyperbola, & ut quadratum GC ad quadr. CD, ideſt in duplicata priorũ ratione, ita A D ad 1 G in hyperbola secunda, & ut cubus G C ad cubum C D, ita eadem A D ad 2 G

ad 2 G in hyperbola tertiæ, hoc est in triplicata priorum ratione, atque ita deinceps, ergo ipsæ A D, E G, 1 G, 2 G, 3 G &c. sunt continuè proportionales. Quod &c.

PROPOSITIO XI.

Iisdem positis, sumatur G D æqualis distantiæ à centro D C, & per punctum G ordinetur communis aplicata G E.

Dico, spatium primæ hyperbolæ F E A D G O ad partes O infinitum æquari aggregato ex infinitis spatiis omnium hyperbolarum per ipsam G E resectis, videlicet G E F O † G 1 1 O, † G 2 2 O, † G 3 3 O &c.

COmpleatur rectangulum G D A *a*, & per punctum *a* inter asymptotos A D G transeat hyperbola *a e f* primæ A E F æqualis prorsus, & similis, ac similiter posita, imò eadem sola positione differens; eritque spatium O *f e a* G O idem quod O F E A D O. Ordinata igitur ubilibet *e* E 1 2 3 *g*, quoniam *per præcedentem* est E *g* ad 1 *g*, ut *g* C ad C *d*, erit per conver-

versionem rationis g E ad 1 E, ut g C ad g D, nempe in ratione composita ex g C ad DC (nempe DA ad g E) & DC, vel æqualis DG, ad g D (seu ge ad Ga aut DA) hæ autem duæ rationes componunt illam, quę est ge ad g E, igitur ge ad g E est, ut g E ad 1 E, quare per *Propos.* 1. ge æqualis erit omnibus proportionalibus terminis Eg, 1g, 2g, 3g &c. siquidem est tertia proportionalis post primam differentiam E 1, & primam magnitudinem Eg; Hoc ubilibet demonstrato, patet omnem ordinatam eg in spatio OfeaGO æquari omnibus ordinatis aliarum hyperbolarum per ordinatam GE resectarum, adeòque & ipsum spatium OfeaGO, vel illi æquale OPEADO æquari prędictis infinitis hyperbolarum portionibus. Quod erat &c.

COROLLARIUM.

HInc ablato communi spatio OFEGO, spatium hyperbolicum DGEA, ordinatis proportionis duplæ interceptum, æquale erit infinitis spatiis quadrabilibus

per

per reliquas hyperbolas determinatis, nempe G 1 1 O † G 2 2 O † G 3 3 O &c.

PROPOSITIO XII

Sumpto parallelogrammo hyperbolę inscripto pro unitate, erit spatium hyperbolicum ordinatis rationis duplæ interiectum æquale seriei fractionum, in quibus unitas denominatur productis singulorum per ordinem numerorum in terminos rationis duplæ.

Idest $= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32}$ &c.

Quia enim *per prop.* 10. E G, 1 G, 2 G, 3 G &c. sunt continuè proportionales in ratione G C ad C D, quę hìc est ratio dupla, erit & series æquè altorum rectangulorum E G C, 1 G C, 2 G C, 3 G C &c. series rationis duplæ, cùmque E G C computetur pro unitate, erit 1 G C = semissi, & 2 G C = quadranti, & 3 G C = octanti &c. sed ex his, quæ demonstravimus in *Hugenianis cap.* 8. *n.* 11. spatium hyperbolæ secundę G 1 1 O = inscripto rectanguio,

nem-

nempe semissi, & spatium hyperbolæ tertiæ $G\,2\,2\,O =$ semissi inscripti rectanguli $2GC$, adeòque $= \frac{1}{2 \cdot 4}$, & spatium quartæ hyperbolę $G\,3\,O =$ trienti rectanguli $3\,G\,C$, atque adeò $= \frac{1}{3 \cdot 8}$ &c. ergo agregatum ex illis hyperbolicis spatiis, ideſt *per Coroll. prop. pręced.* ipsum spatium ADGE ordinatis rationis duplæ in hyperbola primaria interiectum $=$ seriei in titulo propositæ. Quod &c.

COROLLARIUM

Quoniam Quælibet Hyperbolica spatia ordinatis ad alteram asymptoton interiecta sunt inter se ut rationes extremarum ordinatarum, ut ostendimus *in Hugenianis cap. 6 n.* 3. Cognita ratione ordinatarum, quibus interiacent hyperbolica spatia, cognoscetur eorum proportio ad spatium interięctum ordinatis rationis duplæ, quarè data in præcedenti propositione hujus dimensio per infinitam seriem rationalem, quę ejusdem valorem quantum-

vis

vis accuratum determinat, inserviet etiam pro simili dimensione quorumvis propositorum spatiorum ab hyperbola resectorum.

SCHOLION.

HÆc ad quadraturam Hyperbolæ *per Infinitas Hyperbolas quadrabiles* pertinent; superest ut idem *per Infinitas Parabolas* assequi tentemus, id quod multò adhuc faciliùs et expeditiùs obtinebimus; Nam hoc, ut præfati sumus, nobis olim palmarium fuerat, cùm sese ut peregrinam menti nostrę hæc Veritas obtulisset, quam demum inter Geometrię Lares olim receptam deprehendimus; sed sive novam, sive antiquam horum mathematicorum recessuum incolam, sic illam nos adornamus.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Fig. 2.

Hyperbola A B inter aſymptotos M C D exiſtente, quibus ſint parallelæ A E D, B E F convenientes in E, conjuncta verò ad centrum A C, ſecante B F in G, ipſis C D, ſeu F E, & G E ſumatur tertia proportionalis E H, & quarta E I, atque ita deinceps in infinitum.

Aio, lineam F B æquari omnibus illis infinitis terminis E F, E G, E H, E I &c.

Completis enim parallelogrammis D A M, F B L æqualibus *per* 12. 2. *Conic.* erit F C ad C M, ſeu F G ad M A, vel F E, ut eadem M A, vel F E ad F B; quia ergo F B eſt tertia proportionalis poſt F G primam differentiam proportionalium terminorum, et F E primum terminum, erit *ex prop.* 1. F B æqualis onnibus ſimul prædictis terminis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XIV.

Iiſdem poſitis, & intra triangulum C A D deſcripto trilineo parabolæ quadraticę C H A D,

cujus

vis accuratum determinat, inserviet etiam pro simili dimensione quorumvis propositorum spatiorum ab hyperbola resectorum.

SCHOLION.

HÆc ad quadraturam Hyperbolæ *per Infinitas Hyperbolas quadrabiles* pertinent; superest ut idem *per Infinitas Parabolas* assequi tentemus, id quod multò adhuc faciliùs et expeditiùs obtinebimus; Nam hoc, ut præfati sumus, nobis olim palmarium fuerat, cùm sese ut peregrinam menti nostrę hæc Veritas obtulisset, quam demum inter Geometrię Lares olim receptam deprehendimus; sed sive novam, sive antiquam horum mathematicorum recessuum incolam, sic illam nos adornamus.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Fig. 2.

H*Yperbola A B inter asymptotos M C D existente, quibus sint parallelæ A E D, B E F convenientes in E, conjuncta verò ad centrum A C, secante B F in G, ipsis C D, seu F E, & G E sumatur tertia proportionalis E H, & quarta E I, atque ita deinceps in infinitum.*

Aio, lineam F B æquari omnibus illis infinitis terminis E F, E G, E H, E I &c.

COmpletis enim parallelogrammis D A M, F B L æqualibus *per* 12. 2. *Conic.* erit F C ad C M, seu F G ad M A, vel F E, ut eadem M A, vel F E ad F B; quia ergo F B est tertia proportionalis post F G primam differentiam proportionalium terminorum, et F E primum terminum, erit *ex prop.* 1. F B æqualis onnibus simul prædictis terminis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XIV.

I*Isdem positis, & intra triangulum C A D descripto trilineo parabolæ quadraticæ C H A D,*

cujus

cujus vertex A, tangens verticis A D; item, trilineo parabolę Cubicæ C I A D, & aliis in infinitum altiorum graduum ex ordine succedentium.

Dico, Spatium Hyperbolicum A M F B ęquari parallelogrammo M A E F, cum triangulo A E G, & trilineis parabolicis A E H, A E I, cęterisque deinceps per eandem ordinatam F B abscissis.

LIneæ siquidem F E, E G, E H, E I &c. erunt continuè proportionales, nempe correspondentes potęstatibus abscissarum D A, A E ordinatim crescentibus, ergo *per prop. pręced.* erit aggregatum ex ipsis equale toti F B, similiter ducta quavis alia parallela *f b*, ostendetur, hanc æqualem esse aggregato linearum correspondentium *f e*, *g e*, *h e*, *i e* &c. ergo omnes lineæ spatii hyperbolici M A B F æquales sunt omnibus lineis parallelogrammi M A E F, nec non omnibus Trianguli G A E, & trilineorum H A E, I A E &c. adeòque ex methodo Indivisibilium [quam in pręsenti negotio, & in plerisque antecedentium Propositionum

facilè

facilè ad Veterum exhauſtionem reduces, loco linearum aſſumptis æquè altis parallelogrammulis figuras circumſcribentibus) ſpatium Hyperbolicum A M F B æquatur parallelogrammo, & Triangulo, Trilineiſque parabolicis ſupra deſcriptis. Quod &c.

COROLLARIUM I.

HInc habetur, idem Hyperbolicum ſpatium AMFB (vel huic æquale ADLB) æquari parallelogrammo A E F, cum ſemiſſi ſequentis AEG, & trienti alterius AEH, & quadranti ipſius AEI, mox $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ &c. ſequentium parallelogrammorum continuè proportionalium, quorum ſumma æquatur ipſi M F B N [ob baſium ęqualitatem pręoſtenſam), Patet enim, cum ex aliis, tum ex nobis *cap.* 8. *Hugenianorum n.* 10. nedum triangulum G E A eſſe circumſcripti ſui parallelogrammi ſemiſſem, ſed trilineum parabolæ Quadraticæ eſſe trientem, Cubicę verò quadrantem, atque ita deinceps, ſuorum reſpectivè parallelogrammorum.

COROLLARIUM II.

UNde ſequitur, complementum parallelogrammi MFBN, ſcilicet reſiduū ſpatium A*b*BN, æquari reliquo ſemiſſi parallelogrammi AEG, & duobus reſiduis trientibus parallelogrammi AEH, cum tribus quadrantibus ſequentis AEI, & $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ &c. ſubſequentium.

COROLLARIUM III.

HInc obvium eſt arithmeticā ſeriem exibere dictis hyperbolicis ſpatiis ęqualem, adeòque aream hyperbolicam numeris quam proximè exprimere, ad ipſius valorem cum noſtro rectilineo ſpatio comparandum, ſi videlicet, determinato, ut priùs, inſcripto parallelogrammo ADCM pro unitate, & MAEF pro quavis ejus portione $= a$, & conſequenter AEG $= aa$, AEH $= a^3$, AEI $= a^4$ &c. dicatur ſpatiū ABFM $= \frac{a^1}{1} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^5}{5}$ &c.

&

& A b B N $= \frac{a^2}{2} + \frac{2a^3}{3} + \frac{3a^4}{4}$ &c. Vel ſi mavis parallelogrammum M A E F ſupponere $= \frac{1}{x}$ fiet ſpatium A B F M $= \frac{1}{1x^1} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4}$ &c. & A b B N $= \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} + \frac{3}{4x^4}$ &c. Nimirum ſi A E ponatur ſemiſſis ipſius A D, ſpatium A B F M [jam terminatum ordinatis rationis duplæ) erit $= \frac{1}{2} \dagger \frac{1}{8} \dagger \frac{1}{24} \dagger \frac{1}{64} \dagger \frac{1}{160}$ &c. [quæ eſt ipſiſſima ſeries de qua *in prop.* 12. eandem æqualitatem oſtendimus) ſpatiũ verò A b B N $= \frac{1}{8} \dagger \frac{1}{12} \dagger \frac{3}{64} \dagger \frac{1}{40}$ &c.

PROPOSITIO XV.

Eandem Quadraturam analytica oſtenſione confirmare, ejuſdemque cum Leibnitziana conſenſum aperire.

ID non meliùs aſſequar, quàm ſi doctiſſimam Epiſtolam hoc loco reſcripſerim,

qua id pro sua in me humanitate præstare aggressus est Geometriæ, & Analyticæ rei consultissimus Adolescens, & de quo magna sperare liceat, Gabriel Manfredius, Eustachii Clarissimi Mathematici, atque Astronomi Prętantissimi (cujus Tractatum de Curvis Planetariis Cassinianis, cui dudum incumbebat, expectamus, otiumque ejus perfectioni necessarium ipsi apprecamur] in Patrio Bononiensi Archigymnasio Mathesim publicè Profitentis, Dignissimus Frater, quum illi meum hoc inventum de more communicassem, eaque utrumque nostrum sollicitudo teneret, an non cum Leibnitziana Sectoris Conici Quadratura *Actorum Lipsię* 1691. *Mense Aprilis* proposita consonum esset; (Neutro scilicet nostrum in Cl. Mercatoris operibus tale quid de Hyperbolæ Quadratura jam diù propositum esse suspicante, quod postmodùm animadvertimus, ut in pręfatione jam dictum est) ostendit enim ex iisdem Leibnitziani Calculi principiis Aream Hyperbolę, tum ad nostram, tum ad Leibnitzianam seriem reduci posse. Ne verò Tyronibus

Geo-

Geometricis salebrosior ejus ostensio videatur, ubi paulò pressiùs arguit asterismos apponam parentesi inclusos, iisque ex ordine respondebunt Notę ad calcem Epistolæ subnectendæ, quibus omnem deductionis vim in aperto posuisse me arbitror.

GABRIELIS MANFREDJ

EPISTOLA AD AUCTOREM

Propositionis hujus demonstrationi inserviens.

Vir Clariss.

Fig. 1.

S*It inter asymptotos* C H, C F *Hyperbola* A G, *cujus puncta quævis duo* A, *&* G, *&* *per* G *sit asymptoto* G F *parallela* G H, *nec non per* A *asymptoto* H C *parallela* A E, *ipsam* G H *secans in* B, C F *verò in* E, *&* *supponatur ipsi* B G *infinitè proxima* bg, *&* *per* b *ad* B G *normalis* bV, *per* A *verò ad* C F *normalis* A F: *ponaturque* $AE = a$, $AF = b$, $AB = x$, *unde* $BE = 1 - x$, *&* $BG = \frac{ax}{1-x}$ *&* $Bb = dx$;

 quare

quarè propter ſimilia triangula EAF, BbV, *erit* $bV = bdx$, *quæ ducta in* BG, *ſive* bg, *dat ſpatiolū* $BbgG = \frac{abxdx}{1 - x} = abxdx + abx^2dx + abx^3dx + abx^4dx + abx^5dx$ *&c.* [*1) *Quæ ſeries eſt differentiale ſeriei* $\frac{abxx}{2} + \frac{abx^3}{3} + \frac{abx^4}{4} + \frac{abx^5}{5} + \frac{abx^6}{6}$ *&c.* [*2] *quarè ſeries hæc erit æqualis ſpatio* ABG, *quod tuæ ſubtiliſſimæ inventioni adamuſſim conſonat.*

Sed & Leibnitziana ſimiliter oſtendetur Quadratura (in ſequ. fig. 4.) *Eſto enim axis Hyperbolæ* GA *ipſa recta* CAE, *& ejus quidem ſemitranſverſum* $CA = a$, *ſemiſecundarium verò* $CF = 1$, *& aſſumpto quovis puncto Hyperbolæ* G, *eique proximo* g, *jungatur* CG *diameter, eique proxima alia* Cg, *& juncta* Gg [*quæ tangens erit*] *ſecante axem in* D, *ducatur ex* D *ad* CG *perpendicularis* KD, *& portio lineę* AT, *quæ continetur inter* A, *& tangentem* (*ſi ſit* AT *ad* CE *normalis in* A) *ſit* $= x$, *erit* $CE = \frac{axx + a}{1 - xx}$ (*3) *cujus*

dif-

differentiale $= \frac{4axdx}{1 + x^4 - 2xx}$ *et* $GE = \frac{2x}{1 - xx}$ [*4] *cujus differentiale* $= \frac{2dx + 2xxdx}{1 + x^4 - 2xx}$ (*5) *quorum differentialium quadratorũ summa dabit lineolæ* Gg *quadratum, quæ proinde lineola erit* $\frac{2dx\sqrt{4aaxx + 1 + x^4 + 2x}}{1 + x^4 - 2xx}$ [*6] *seu posita quantitate* $\sqrt{4aaxx + 1 + x^4 + 2xx} = c$, *erit* $Gg = \frac{2cdx}{1 + x^4 - 2xx}$; *erit autem* CD, *propter tangentis Hyperbolæ proprietatẽ*, $= \frac{a - axx}{xx + 1}$ [*7] *unde propter similia triangula* CGE, CDK, *erit* KD *equalis* $\frac{2ax - 2ax^3}{1 + xx\sqrt{aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx}}$ (*8) *& cùm sit* $GD = \frac{2xc}{1 - x^4}$ (*9) *erit* Mg (*arcus circuli, centro* C, *intervallo* Cg *descriptus*) $= \frac{2adx}{\sqrt{aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx}}$ (10)

 Quæ

Quæ quantitas Mg ducta in CG dat duplum trianguli CGg, quod proinde triangulum erit = $\frac{a\,dx}{1 - xx}$ (*11) *hoc est* = $a\,dx + axx\,dx + ax^4\,dx + ax^6\,dx$ &c. *cujus seriei cùm sit integrale* $ax + \frac{ax^3}{3} + \frac{ax^5}{5} + \frac{ax^7}{7}$ *&c.* (*12) *sequetur, hanc seriem æquari sectori CGA, prorsus ut Leibnitzius cit. loco. Idemque proportionaliter Circulo, & Ellipsi applicabitur.*

Debet igitur necessariò tua ingeniosa inventio cum iis, quæ D. Leibnitzius ostendit, coincidere, nec mihi ampliùs dubium erit, quin vestrum utriusque mentem sim assequtus, quas in Veritatem unanimiter conspirare tandem deprehendi. Te Vir Cl. - - - - &c.

NOTÆ IN PRÆCEDENTEM EPISTOLAM.

NE iterum cogamur fractiones repetere cum nimio Typographi incommodo, illas subinde significabimus per asterismos adnexos, ita ut quilibet asterismus cum numero conjuncto denotet, vel seriem, vel simplicem fractionem, quæ immediatè præcedit similem asterismum in Epistolæ textu.

(*1)

(*1) Quoniam videlicet ſeries hæc ducta in 1. producit ſeipſam, ducta verò in $-x$ dat $-abx^2dx - abx^3dx - abx^4dx$ &c. ubi omnes termini elidunt ſingulos prioris ſeriei, integro ſolùm remanente $abxdx$ numeratore fractionis illius, cui hæc ſeries in Epiſtola æqualis aſſeritur. Vide *noſtra Hugeniana Theoremata cap.* 10. *n.* 5.

(*2) Differentia enim cujuſvis poteſtatis indeterminatæ x eſt eadem poteſtas ducta in ſuum exponentem, & una ejus dimenſione differentiata, quantitatibus conſtantibus, quibus afficitur, invariatis, quippe quarum nulla eſt differentia, itaque differentiando hanc ſeriem prodit illa præcedens $abxdx + abxxdx + abx^3dx$ &c.

[*3] Sit enim integra diameter tranſverſa ACH, & tangens GD producta occurrat HL tangenti oppoſitæ Hyperbolæ in L; erit *per* 42. 3. *Conic.* TA in HL = quartæ parti figuræ, ſeu quadrato ſecundæ ſemidiametri CF, nempe = 1; unde cùm AT ſit = x, erit HL = 1 diviſæ per x; itaque $1 - xx$ erit HL in AT minùs AT quadrato, ſeu HL $-$ AT in AT; & $1 + xx$ erit HL

HL in AT + AT quadrato, seu HL + AT in AT; quare $1 - xx \, . \, 1 + xx$ :: HL — AT. HL + AT :: HD — DA . HD + DA :: AC + CD — DA . HA :: 2CD . 2CA :: CD. CA :: CA . CE (37. 1. *Conic.*) :: a . CE æqualem fractioni propositæ.

[*4] Quia proportionalium EC, AC, DC etiam differentiæ sunt proportionales, erit EA . DG :: CH . HE :: $a \, . \, a$ + (*3), quod instituta divisione per a, & multiplicatione per $1 - xx$ dat $1 - xx \, . \, 1 - xx + xx + 1 :: 1 - xx \, . \, 2$; cum ergo in eadem ratione AD . DE sit AT seu x ad EG erit hęc = fractioni propositę.

(*5) Cujusvis enim fractionis differentia est factum ex denominatore in differentiam numeratoris, minùs facto ex numeratore in differentiam denominatoris, utroque diviso per denominatoris quadratum, putà differentia ipsius $\frac{n}{m} = \frac{mdn - ndm}{mm}$ itaque differentia ipsius (*4) = aggregato $2\,dx - 2\,xx\,dx + 4\,xx\,dx$ [nempe $2\,dx + 2\,xx\,dx$] diviso per quadratum residui ex $1 - xx$, ut denotat fractio hic assignata: que-

quemadmodùm & ſupra ipſius [*3] differentiale poſitum eſt quod reſultat ex diviſione $4axdx$ per $1 + x^4 - 2xx$, quia $2axdx - 2ax^3dx + 2ax^3dx + 2axdx = 4axdx$

(*6) Quadratum enim fractionis poſitę in Epiſtola paulò poſt (*3) $= 16aaxxdx^2$ diviſo per quadratum ipſius $1 + x^4 - 2xx$, & quadratum alterius fractionis quæ in Epiſtola adducitur paulò poſt (*4) eſt trinomium $4dx^2 + 4x^4dx^2 + 8xxdx^2$ diviſū per quadratū ejuſdem $1 + x^4 - 2xx$, adeòque utrumque $=$ polynomio $16aaxxdx^2 + 4dx^2 + x^4dx^2 + 8x^4xdx^2$, cujus radix eſt quæ hìc aſſignatur.

(*7) Viſum eſt enim *num.* 3. eſſe $xx + 1$ ad $1 - xx$, ut CA ideſt a, ad CD, quæ propterea erit, ut hìc notatur.

(*8) Nam CG eſt radix quadratorum CE, & GE, ideſt (*3), & (*4] ergo CG $=$ radici polynomii $aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx$ diviſę per $1 - xx$ eſt ad GE (*4), ut CD (*7) ad Dζ $=$ fractioni propoſitæ.

(*9) Etenim DA $=$ CA $-$ CD $= a -$ (*7) $= axx + a - a + axx$ diviſis per binomium

mium $xx + 1$, seu $= 2axx$ per idem binomium diviso; est autē CD $=$ (*7) ad CA $= a$, ut ipsa DA ad AE, quæ ideò prodit $2axx$ divisus per $1 - xx$, undè tota DE fit summa ex $2axx$ diviso per $xx + 1$, & ex eodem diviso per $1 - xx$; quod relinquit $4axx$ divisum per $1 - x^4$; Jam, ut differentia CE $=$ fractioni, quæ in Epistola subjungitur post [*3] ad Cg $= 2cdx$ diviso per quadratum ipsius $1 - xx$, ita DE $=$ fractioni nuper inventæ ad DG $=$ (*9), ut proponitur.

[*10] Ob proportionales GD . DK :: Gg . gM fit (*9) ad $2ax - 2ax^3$ divisos per factum ex binomio $1 + xx$ in radicem polynomii $aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx$, ut $2cdx$ divisus per quadratum ipsius $1 - xx$ ad aggregatū $2adx - 2ax^4dx - 2axxdx + 2ax^6dx$ divisum per productum ex polynomio $1 - xx - x^4 + x^6$ in radicem polynomii $aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx$, quæ fractio evadit tandem $=$ [*10] dividendo numeratorem per $1 - xx - x^4 + x^6$

[*11] Quippe ex dictis *num.* 8. CG $=$ radici polynomii $aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx$

divisæ

divisæ per $1 - xx$, quę ducta in Mg dat pro rectangulo duplum propositę fractionis, cujus adeò dimidium triangulum elementare CGg eidem fractioni adęquatur.

[* 12] Hęc reductio in infinitam seriem trianguli elementaris, ejusque integratio pro valore sęctoris Hyperbolici patet ex jam notatis in simili *ad num.* 1. & 2. Quarè manifesta sunt omnia Viri Clarissimi Pronunciata: Quæ tamen nolim pro Viris in Geometriæ adyta jam admissis, sed pro Tyronibus tantùm notata esse; itaque

Qui satis hæc novit, ne sibi dicta putet:
Quamquàm adhuc longè pluribus dicendum esse vereor:
Qui neque sic capiunt, non sibi dicta putent.

PROPOSITIO XVI.

I*Dem consensus cum Cl. Leibnitzio breviùs, & immediatiùs proponitur.*

Fig. 3.

SInt eadem, quæ in primo §. Ingeniosissimę Epistolæ superiùs adductę, nisi quòd supponendus est CA sectionis axis $= c$,

$= c$, AL verò, aut AI tangentis portio vertici & asymptotis interposita [quæ & æquatur semiaxi conjugato *per* 1. 2. *conic.*] esto $= 1$, adeòque AE non jam pro unitate computetur, sed sit $= a$ [utì & CE illi in hoc casu æqualis] fiet jam $bV = \frac{bdx}{a}$, item $HG = \frac{aa}{a - x}$ [ut ex simplici linearum proportionalitate patet] itaque spatiolum $GgbH = \frac{abdx}{a - x}$ idest $= bdx + \frac{bxdx}{a} + \frac{bxxdx}{aa} + \frac{bx^3dx}{aaa}$ &c. cujus Integrale, nempe spatium AMHG $= bx + \frac{bx^2}{2a} + \frac{bx^3}{3aa} + \frac{bx^4}{4aaa}$ &c. ut habet quadratura à nobis superiùs tradita.

Verùm ob proportionales IC . CA :: IA . AF (propter triangulum CAI rectangulum simile ipsi CAF) est $2a . c :: 1 . b = c$ diviso per $2a$, quo valore loco b substituto in quantitate $\frac{1bdx}{a - x}$ designante, ex dictis, spatiolum $= \frac{cdx}{2a - 2x}$, & multiplicando tam numeratorem, quàm denomi-

mi-

minatorem per 2, mox denominatori addendo $xx - xx$ [quod non variat valorem, cùm ſit $= 0$] fiet $\frac{2acdx}{4aa - 4axx + xx - xx}$ ſeu $\frac{2acdx}{\overline{2a - x}^2 - xx}$ $=$ dicto ſpatiolo.

Cùm ſit autem kL parallela GA *per* 44. 3. *Conic.* ut LA ad AO, ita kG ad GO, vel IQ ad QO, & ſumma antecedentium LA † IQ ad ſummam conſequentium AQ, ſeu ob parallelas, LM † CH ad HM, nempe $2a - x . x :: $ LA, ideſt 1, ad AO $= \frac{x}{2a - x}$ quam vocemus t; ergo ipſius t differentia $dt = \frac{2adx}{\overline{2a - x}^2}$ ejuſq. quadratũ $tt = \frac{xx}{\overline{2a - x}^2}$, & $1 - tt = \frac{\overline{2a - x}^2 - xx}{\overline{2a - x}^2}$, & $cdt = \frac{2cadx}{\overline{2a - x}^2}$, & demum $\frac{cdt}{1 - tt} = \frac{2cadx}{\overline{2a - x}^2 - xx} =$ ſpatiolo GHbg, quod reſolvendo de more in ſeriem infinitam, prodit $cdt + ctt\,dt + ct^4\,dt + ct^6\,dt$ &c. cujus integrale jam erit $ct + \frac{ct^3}{3} + \frac{ct^5}{5} + \frac{ct^7}{7}$ &c. prorſus ut Clariſ-

ſimus

ſimus Leibnitzius determinavit, ęquale ſpatio A M H G, ſive ſectori hyperbolico ACG, cui illud æquatur, ob triangula CHG, CMA æqualia, & commune ablatum HRC, ac utrinque additum ſpatium ARG. Patet igitur noſtrarum ſpeculationum conſenſus cum profundiſſimis Summi illius, & Incomparabilis Geometræ cogitatis, quamquàm haud putarim per tot ambages ipſum proceſſiſſe, ſed longè ſimpliciori demonſtratione [illi fortè affini, quam pro Circulari, & Elliptico ſectore *prop. 9.* jam dedimus] in veritatis hujus cognitionem veniſſe.

SCHOLION.

ABſolutam vides, Mi Lector, Hyperbolę per infinitas parabolas Quadraturam, & extra cujuslibet dubii diſcrimen jam poſitam, oſtenſo ejus cum Leibnitzianis ſpeculationibus conſenſu; Ad methodi tamen confirmationem ſubdere placet aliquot aliunde nota ad Hyperbolę menſuram pertinentia, quæ ex noſtris hiſce Propoſi-

positionibus sponte sua profluunt. Exempli causa.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 2.

Quodlibet Hyperbolicū spatium LCMAbB, Hyperbolæ, & Asymptoto infinitè productis interiectum, est magnitudinis absolutè infinitæ.

Quia enim in hoc casu idem parallelogrammum MADC circumscribitur, & triangulo CAD, & trilineis parabolicis CHAD, CIAD &c. erit, *juxtà prop.* 14. spatium Hyperbolicum in titulo designatum æquale inscripto parallelogrammo semel integrè accepto, unà cum ejus $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ &c. ejusdem. Verùm omnes hæ fractiones, quibus unitas per singulos numeros denominatur, æquales sunt infinitis unitatibus [nam tres primę superant unitatē, & novem sequentes adhuc aliam unitatem excedunt, & 27. deinceps altera unitate rursus sunt majores, & 81. succedentes si-

 mili-

militer plusquàm aliam unitatem conficiunt, atque ita porrò sumptæ juxtà altiores potestates ternarii, ut observat V. Cl. Petrus Mengolus Bononiensis *in præf. libri de Quadrat. Arith.*] ergo & illud spatium Hyperbolicum longitudine infinitum æquivalebit infinitis numero parallelogrammis inscriptis, adeòque absolutè magnitudinis erit infinitę, ut dudum alii demonstrarunt, & nos ipsi ostendimus *in Hugenianis cap.* 8. *n.* 11. Quod erat &c.

COROLLARIUM.

SPatia infinita ejusdem gradus, quantumlibet finita quantitate differant, sunt invicem æqualia: putà, spatium LCMAB, & spatium LCFB, utraque ad partes BL infinita, sunt exactissimè æqualia, licet primum videatur superare secundum spatio MABF. Hoc quidem satis per se notum est intelligentibus quid sit Infinitum, neque id ullam apud Geometras dubitationis umbram suscipere potest, quum sciant, finiti ad infinitum nullam esse rationem, proin-

proindeque non crescere infinitum additione finiti, quemadmodùm nec crescit linea ad unjus puncti incrementum, & generaliter, quantitates, quarum differentia infinitè exigua est, semper à Geometris, & Analystis æquales censeri, ut præsertim videre est apud Thomam Cevam in eleganti Opusculo *de Parab. ad mod. ellips. consid.* & apud Hospitalium *de infinitè exiguis.* Quia tamen Philosophorum nonnulli id in dubium vocare ausi sunt, ex suis dumtaxat præjudiciis, crassoque loquendi, & æstimandi modo rem metientes, non gravabor id exacta demonstratione in hunc modum stabilire.

Ostensum est *hac propos.* infinitum spatiũ LCMAB æquari parallelogrammo MACD, ejusdemque semissi, & trienti, & quadranti, cæterisque partibus per singulos numeros denominatis; eodem autem ratiocinio constat, & spatium infinitum LCFB æquari parallelogrammo FBLC, cum ejus semisse, triente, quadrante, similibusque partibus deinceps assignabilibus; suntque integra parallelogramma MADC, FBLC

 per

per 12. 2. *Conic.* invicem æqualia, adeòque & utriusque semisses, trientes, quadrantes, & quotlibet similes partes perpetuò æquantur; ergo & ipsa infinita spatia prædicta, licet finita magnitudine MABF differre invicem videantur, exactè æqualia nihilominus erunt. Quod fuerat demonstrandũ.

SCHOLION.

IMò, nedum infinitę magnitudines ęquales censendæ sunt, cùm finita quantitate semet excedunt, sed quandoque etiam si excessu absolutè infinito se invicem superent, possunt nihilominus æquales manere, cùm scilicet integræ magnitudines, quæ comparantur, non fuerint in eodem genere Infinitatis cum sua differentia, sed in ordine altiori, ut patere poterit ex aliàs dicendis.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 2.

S*Patia VQMA, AMFB, ordinatis proportionalibus VQ, AM, FB (sive continuis,*

tinuis, sive discretis) interiecta, sunt invicem aequalia.

ETenim proportionales erunt pariter distantiæ à centro QC, MC, FC, adeòque eadem pars erit parallelogrammum VQMk ipsius VQCS, quę FEAM ipsius MADC, nec non eadem pars triangulum PKV ipsius VSC, quæ GEA ipsius ACD; sunt autem tum integra parallelogramma, tum integra triangula VSC, ADC inter se æqualia *per* 12. 2. *Conic.* ergo & eorum portiones similes VQMk, & AEFM, nec non VKP, & AEG invicem sunt æquales: similiter ostenderetur, reliqua trilinea parabolica, quę utrique segmento correspondere nt facta utrębique descriptione, quam *prop.* 14. fieri imperavimus, esse pariter invicem æqualia, quippe eadem pars integrorum ejusdem nominis trilineorum, parallelogrammìs VSCQ, ACDM inscriptorum, quæ, non minùs ac ipsa parallelogramma, invicem æquantur; æqualis igitur semper erit infinita series exprimens juxtà *propos.* 14. *ejusque corollaria* valorem;

 seu

ſeu quantitatem utrius vis ſegmenti hyperbolici V Q M A, A M F B, quæ propterea hac etiam methodo æqualia oſtenduntur, non minùs quàm id geometricè factum fuerit, tum à Gregorio à S. Vinc. aliiſque; tum à nobis ipſis *in Hugenianis cap. 6. n. 2.* Quod erat &c.

COROLLARIUM I.

HInc facile fuerit datum quodvis Hyperbolicum ſpatium in data ratione ſecare [illegible] ratione, quam habet m ad 1; [illegible] inter extremas ordinatas datũ ſpatium claudentes tot mediis proportionalibus, quot exprimit $m - 1$; erit quippe ratio primæ ordinatarum ad primam mediarum aſſumptarum tam ſubmultiplicata rationis extremarum ordinatarum, quàm multiplex fuerit m unitatis, adeòque prima ordinatarum cum prima mediarum intercipient hyperbolicum ſpatium $= \frac{1}{m}$ totius propoſiti, ut oſtendimus *in Hugenianis cap. 6. n. 3.*

CO-

COROLLARIUM II.

UNdè etiam conſtat, quomodo ſpatia eadem Hyperbolica ſint velut Logarithmi rationis ordinatarum, ſive diſtantiarum à centro, ut idem Gregorius à S. Vincentio primus animadvertit, & ex iis, quæ de Hyperbolæ ad Logiſticam, ſeu Logarithmicam relatione demonſtravimus *in Hugenianis cap. 6. n. 4. & cap. 13. n. 8.* colligi poteſt.

SCHOLION.

HÆc ſatis ad methodi, qua in hujus Quadraturæ demonſtratione uſus ſum, illuſtrationem, & confirmationem allata arbitror. Nunc quia *ſub finem Capitis 13. Hugenianorum* aliam mechanicè expeditiſſimam Hyperbolæ Quadraturam ex ſimplici Tractoria deductam propoſuiſſe me memini, illius veritatem hoc loco demonſtrare non incongruum fuerit, imò ad Argumenti, quod præ manibus habemus, complementum ita pertinere putaverim, ut in-

interfit plurimùm, ne cęteras inter hac de re fpeculationes hæc minimè contemnenda defideretur. Præmittenda funt autem fequentia.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 9.

Esto Hyperbola A B, cujus centrum D, axis tranfverfus M A, femiaxis fecundus priori coniugatus D K: pofitaque in axe primario ipfa D E æquali D K, per polum E, intervallo D A Conchois defcribatur Nicomedea A H, cujus regula D K, & ramus quilibet E C H regulam fecet in C, unde primo axi parallela C B occurrat Hyperbolę in B, ramo autem E H parallela ex centro D I occurrat verticis tangenti A I in puncto I.

Dico ipfam D I effe æqualem C B.

Ordinata enim B L erit ejus, vel ęqualis C D, quadratum ad rectangulum M L A ut rectum figurę latus ad tranfverfum (*ex* 21. 1. *Conic.*] five ut fecundæ femidiametri D k, vel D E quadratum ad quadratum D A, ergo permutando D C quadra-

dratum ad quadratum DE, ut rectangulum MLA ad quadratum DA, & componendo, quadratum EC ad quadratum ED, ut quadratum LD ad quadratum DA; sed, ob similitudinem triangulorum ECD, DIA, ita est etiam quadratum DI ad idem quadratum DA, ergo DL, aut CB æquatur DI. Quod erat &c.

PROPOSITIO XX.

Iisdem positis ordinetur in Conchoide HG regulę parallela, ipsam CB secans in P, & DI in F, jungaturque GB.

Dico hanc fore tangentem Hyperbolę in puncto B.

Radio DA circulus AN describatur, qui transibit omnino per punctum F, cùm sit, ob Conchoidem, CH æqualis DA, in parallelogrammo autem DCHF ipsi CH sit rursus æqualis DF, erit ergo ID ad DF (nempe LD *ex prop. præced.* ipsi æqualis ad DA) ut DA ad DG; quarè rectangulum LDG æquabitur quadrato DA,

D A, & *per Coroll. prop.* 37. 1. *Conic.* lineâ B G erit tangens. Quod erat &c.

COROLLARIUM I.

HInc omnis ordinata hyperbolę L B æqualis eſt portioni ordinatæ Conchoidis F H, inter Conchoidem ipſam A H, & arcum A F inſcripti quadrantis interiectæ, modò hæc, producta ad axem in G, incidat in occurſum tangentis B G cum cum eodem axe, quippe in parallelogrammo D C H F eſt H F æqualis D G, adeòque & ipſi B L.

COROLLARIUM II.

PUncta autem P, quibus eædem Conchoidis ordinatę occurrunt axi parallelis B C, ſunt ad curvam A P *p* Hyperbolæ Correlatam juxtà deſcriptionem datam *in Hugenianis cap.* 8. *n.* 2. cùm ſit B P æqualis ſubtangenti L G.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

S*Tantibus prĉmissis: Dico, spatium Conchoidale F A H, arcu A F, curva A H, & ordinatĉ portione F H circumscriptum, duplum esse trilinei Hyperbolici G B A, per tangentem G B, curvam A B, & axis segmentum A G determinati.*

CUm linea F H sit ubique ĉqualis B L, seu G P, erit spatium Conchoidale A F H æquale portioni Correlatĉ G P A; sed ex dictis *ad finem num. 2. Capitis 8. Hugenianorum* portio illa correlatæ dupla est trilinei G B A, ergo & spatium A F H ejusdē trilinei est duplum. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXII.

H*Yperbolam simplicis ope Tractoriæ quadrare.*

SIt Hyperbolæ portio V A B quadranda, vel, quod eòdem redit, trilineū G V A B, duabus tangentibus, & hyperbolæ curva V A B comprehensum sit in rectilineum spa-

ſpatium expeditè commutandum. Concipiantur omnia in horizontali plano jacere, & ſumpto funiculo D A, pondere in extremo A appoſito, quod ſubiectum planum premat, alterum extremum D ſecus axem ſecundum D R *d* trahatur, quouſque funis D A tranſierit in *d a*, & pondus A trahentis directionem ſequens fuerit perductum in *a*, ſecans lineam G Q ſecundo axi parallelam in ipſo puncto *a*; Tunc enim rectangulum ex ſemiaxe ſecundo D k, ſeu D E in G *a* æquabitur trilineo G V A B, quo propterea detracto ex triangulo V G B, innoteſcet Hyperbolicum ſpatium V A B.

Demonſtratio. Funis D A, ſeu *d a* ſemper eſt tangens curvę tractorię A *a* deſcriptę à pondere ejus directionem ubivis ſequente, igitur tum radius quadrantis D F, tum ramus Conchoidis E H, erit ubique parallelus tangenti *a d* tractoriæ [lineæ enim æquales, inter eaſdem parallelas ad eaſdem partes inclinatæ, ſunt pariter parallelæ] itaque tum figuræ R D A *a* eſt correlatus quadrans D A F N, tum ipſi O E A (ducta E O axi ſecundo parallela, extenſiſque *a* R, *a d*,
quo-

quousque ipsam secent in O, T) correlatum est segmentum Conchoidale E A H; itaque *per Cap.* 8. *n.* 3. *Hugenianorum* erit portio O E A *a* ęqualis segmento A G H, & portio R D A *a* æqualis ipsi A G F; reliquũ igitur rectangulum O E D R, quod sub E D æquali semiaxi secundo, & sub D R, vel G *a* continetur, æquabitur trilineo A F H; sed hoc *per præcedentem* duplum est trilinei A G B, ideſt æquatur trilineo V A B G, ergo & dictum rectangulum huic ipsi Trilineo Hyperbolico æquale erit. Quod fuerat demonstrandum.

COROLLARIUM.

HInc manifestum est, ipsas G *a* Tractorię axi parallelas proportionari trilineis Conchoidalibus AFH, & Hyperbolicis GAB sibi correspondentibus.

SCHOLION.

OBvium esset eandem methodum aliis Conchoidum generibus ad aliarum Cor-

Correlatarum figurarum dimensionem extendere simili ratiocinio, sed cùm verear, ne ultra fines mihi constitutos hic Tractatus excurrat, id Lectoribus meis pro nunc exequendum relinquam, quin & aliis curis implicitus complura alia ad Circuli, & Hyperbole Tetragonismum pertinentia consultò omittam, proposito titulo satis superque fæcisse me ratus, quarè hìc esto nostræ *De Quadratura Circuli, & Hyperbolæ* Dissertationis

FINIS.



AP-

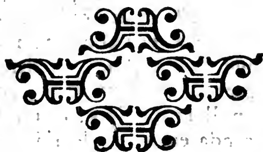
APPENDIX

De methodo, Curvas innumeras, præsertim Parabolas, & Hyperbolas dimetiendi, & rectificandi, nec non Generali earundem expressione analytica per Seriem Infinitam.



Micorum votis morem gerens hanc etiam qualemcumque Meditatiunculã adjungo, licèt ab Argumento hujus Libri tantisper alienam, nisi in speculationum similitudine, ac demonstrandi modo præcedentibus affini, connexionem nonnullam inquiras; Etsi autem quę nunc dicenda erunt pridem indicaveram *in Epist. Geom. ad P. Thomam Cevam Hugenianis adnexa num.* 17. occasione rectificationis Cycloidis, quam hac ipsa methodo exhibui, innuique id generatim circa innume-

numeras alias curvas inſtitui poſſe, viſum tamen fuit ſpecialiùs doctrinam illam applicare, & ad omnes Parabolas hìc extendere, ut faciliùs deinceps, tum hanc, tum alias paſſim in noſtris operibus occurrentes methodos promovere, ac particularibus exemplis illuſtrare Tyrones addiſcant ad Scientiæ hujus omnium Nobiliſſimę, Jucundiſſimęque incrementum.



PRO-

PROPOSITIO UNICA

Fig. 10.

SIt curva quælibet ADB, rectis ICA, 8BZ ad basim CB perpendicularibus intercepta, & ex quibuslibet ejus punctis D, d actis DEH, deh basi pariter normalibus, nec non tangentibus FDG, fdg inter extremas perpendiculares terminatis, ponatur ubilibet EH æqualis FG, eh æqualis fg, quousque per puncta H, h sic determinata transeat curva IHh.

Dico, spatium curva IHh, rectisque IC, CB, B8 comprehensum æquari rectangulo basis CB in curvam ADB: item, portionem quamlibet IHEC æquari rectangulo ex eadem CB in correspondentem arcum AD.

INtelligatur curvæ portio D*d* indefinitè parva, ut cum tangentis suæ portiuncula D*d* coincidere censeri possit, certè ut ab æqualitate propiùs absint, quam pro qualibet assignabili differentia; itaque, ob parallelas proportionaliter secantes interceptas FG, CB, erit illa ad hanc, ut D*d* ad E*e*, rectangulum igitur extremarum HE*e* æquabitur rectangulo mediarum CB

 in D*d*;

in D *d*; Quod cùm ubilibet contingat, manifeſtum eſt, omnia rectangula, quæ per indefinitam ſectionem baſis C B adſcribi poſſunt ſpatio *b* H I C B 8 (cujuſmodi unum eſt *b e* E 2) quæque ab ipſo differre poſſunt minori differentia qualibet data, prout puncta D, *d*, ſeu E, *e* in infinitùm proximiora accepta fuerint, ęqualia eſſe rectangulo baſis C B in omnes curvæ portiunculas D *d*, atque adeò ſpatium, curva I H *b*, rectiſque &c. ut propoſuimus.

COROLLARIUM I.

SI punctum A fuerit vertex curvæ, & A Z ejus tangens parallela, adeòque æqualis baſi C B, utique & C I æquabitur C B, eritque I C B 4 quadratum, quod ad ſpatium *b* H I C B 8 erit, ut baſis B C ad curvam A D B, rectangulumque I C E R ad ſpatium correſpondens H I C E erit, ut C E, vel ordinata M D, ad arcum A D. Aliàs deſcribatur quadratum ipſius C B, quod ſit C B 4 I, & eadem ſequentur.

CO-

COROLLARIUM II.

QUoniam quadratum FG ad quadratum CB (vel HE, ſeu NC quadratum ad quadratum ER vel CI] eſt ut quadratum FD ad quadratum DM, erit dividendo [poſita *a* C æquali CI] rectangulum *a*NI ad quadratum CI [ſeu differentia quadratorum HE, RE ad RE quadratum] ut quadratum ſubtangentis FM ad quadratum ordinatæ MD, quod, ut mox patebit, ad naturam curvę IH*b* in ſequentibus expeditè determinandā aptiſſimè conducere poteſt.

COROLLARIUM III.

SPeciatim igitur ſi ADB fuerit Circuli quadrans erit ſpatium *b*HICB8 duplum ipſius, & portio quævis IHEC dupla ſectoris correſpondentis CDA, rectangula enim ex radio CB in curvam ADB, vel ejus arcum AD, quæ ſpatiis *b*HICB8, & IHEC reſpectivè æquantur, dupla ſunt ex Archimede, vel *ex Coroll.* 1. *noſtræ Prop.*

36. *in Vivianea Problemata* totius quadrantis, aut sectoris correspondentis.

COROLLARIUM IV.

IN hac eadem hypothesi patet, ordinatam EH ęquari interceptæ à centro, et tangente axis portioni CF, cùm sit enim FG ad CB, ut FD ad DM, seu ut FC ad CD, ob æqualitatem consequentium CB, CD, æqualia erunt & antecedentia FG, FC, ipsi autem FG æqualis est per constructionem EH. Quare &c.

COROLLARIUM V.

NOtari etiam potest, spatium *b*HICB8 tunc provenire idem cum spatio figuræ quadrâti correlatæ, de quo *in Hugenianis cap.* 8. *num.* 6. loquti sumus, neç ab illo differre, nisi varia linearum axi parallelarum applicatione, ibi scilicet à singulis peripheriæ punctis pendentium, hìc directè ad correspondentia basis puncta depressarum; nam & rectę *a o in figura loco*

cit.

cit. exhibita ęquantur diſtantiis centri ab occurſu tangentis cum axe, ut hìc oſtenſæ ſunt EH æquales FC.

COROLLARIUM VI.

SPatium IHN duplum eſt correſpondentis Trilinei FDA, nam & rectangulum CEHN duplum eſt trianguli FDC parem baſim intra eaſdem parallelas habentis, & ſpatium IHEC duplum eſt, *per coroll.* 3. ſectoris ADC, unde & reſiduum IHN reliqui FDA pariter duplum.

COROLLARIUM VII.

IMò quęcunque eſſet curva ADB, ſi juxta *Coroll.* 4. alia curva IHk ita illi reſponderet, ut ſemper ordinata EH eſſet ęqualis FC diſtantiæ puncti fixi C ab occurſu tangentis cum axe, tum Corollarium III. tum VI. locū haberent, nam ductis ex indefinitè proximo puncto *d* tangente *df*, & parallela ordinatę *deh*, quoniam F*f* differentia ipſarum FC interceptarum inter

punctum fixum C, & occursum tangentis, semper æqualis erit H 2, vel N *n* differentiæ ordinatarũ E H ipsis C F æqualium, rectangulum *n* N H 2 duplum erit trianguli æquè alti F *f* D; quod cùm ubique eveniat, palam est, spatium I H N duplum fore spatii FDA, sed & duplum rectangulum C E H N trianguli æqualem basim in eadem altitudine obtinentis C D F; itaque & spatium I H E C duplum erit spatii A D C.

COROLLARIUM VIII.

AT si curva A D B [positis iis quę in propositione] fuerit Parabola quadratica, erit I H *b* Hyperbola ordinaria, cujus transversum latus *a* I, rectum verò tertia proportionalis post *a* I, & parametrum ejusdem parabolæ, nam quia semper F M est dupla A M, atque ut A M ad M D, ita hæc ad parametrum, duplicando rationes, sumptoque multiplici primi antecedentis, & æquè submultiplici secundi consequentis, erit F M q ad M D q. (idest *per Coroll.* 2. rectangulum *a* N I ad quadra-

tum

tum I C) ut quadratum M D, vel N H ad quadratum ſemiparametri, & permutando rectangulũ *a* N I ad quadratum N H, ut quadratum I C ad quadratum ſemiparametri, ſive ut *a* I ad tertiam proportionalem poſt *a* I, & parametrum, quę eſt nota proprietas Hyperbolæ prædictis lateribus deſcriptę *per* 21. *Conicorum*.

COROLLARIUM IX.

QUòd ſi ſupponatur eſſe A D B parabola cubica, erit curva I H *b* Hyperboloides, cujus ordinatarum quartæ poteſtates, ſeu biquadrata, proportionentur rectangulis *a* N I, nam tunc F M eſt tripla A M, atque ut hæc ad M D, ita quadratum M D ad quadratum parametri, adeòque A M quadratum ad quadratum M D, ut biquadratũ M D ad biquadratũ parametri, & F M q. ad M D q. (ſeu *a* N I ad I C q.) ut biquadratum M D vel N H ad nonã partẽ biquadrati parametri; ſimiliter, & convertendo oſtendetur I C q. ad *a n I*, ut nona pars biquadr. parametri ad biquadr. *n b*; ex

ęquo igitur rectangula a N I, a n I proportionantur N H, n b biquadratis.

COROLLARIUM X.

Eodem ratiocinio ostendetur, curvas I H b semper esse Hyperboloides aliorum graduum, quoties A D B sit aliqua ex aliis infinitis parabolis, cujus ordinatarum potestates à quolibet exponente m denominatę proportionentur abscissarum potestatibus ab alio quolibet exponente n indicatis, erit enim semper A M ad M D, ut potestas $\frac{m-n}{n}$ ipsius M D ad similem parametri potestatem, adeòque A M quadratum ad quadratum M D, ut potestas $\frac{2m-2n}{n}$ ipsius M D ad similem potestatem parametri, cùmque F M sit semper $\frac{m}{n}$ ipsius M A, erit F M quadratum ad quadratum M D (nempe rectangulum a N I ad quadratum I C) ut potestas $\frac{2m-2n}{n}$ ipsius

M D,

M D, vel N H, ad $\frac{nn}{mm}$ ſimilis poteſtatis parametri, adeòque ordinatarum N H poteſtates $\frac{2m-2n}{n}$ ipſis rectangulis *a* N I proportionales ſimili ratione demonſtrabuntur; quod eſt, curvam I H *b* eſſe aliquam ex infinitis Hyperboloidibus ad diametrum I C comparatis.

COROLLARIUM XI.

NOtatu dignum eſt, Hyperboloides ejuſmodi ſpatium abſolutè quadrabile aliquando comprehendere, & tum Curvas Parabolicas iis reſpondentes eſſe abſolutè rectificabiles; certè in parabola cubica ſecundi ordinis, ubi *m* valet 3, *n* valet 2, unde $\frac{2m-2n}{n}$ valet $\frac{6-4}{2}$, ideſt æquivalet unitati, rectangula *a* N I, ſeu differentiæ quadratorum H E, R E, erunt in ratione ſimplicium linearum N H, ſeu I R, ideòque curva I *b* H (concavitate versùs C B obverſa] erit portio quædam Parabolę quadraticę, per ordinatam I C à vertice ob-

obtruncatæ, ex notiſſima hujus parabolæ natura.

COROLLARIVM XII.

PAriter ubi ordinatarũ Parabolæ ADB quintæ poteſtates correſponderent biquadratis, ſeu quartis poteſtatibus abſciſſarũ, valor exponentis ordinatæ ad Hyperboloidẽ NH eſſet $\frac{10-8}{4}$, ideſt $\frac{1}{2}$: quod indicat rectangula *a*NI fore in ſubduplicata ratione ordinatarum NH; quod genus Hyperbolæ jam ad menſuram vocavit Illuſtris Geometra Stephanus De Angelis altera parte ſui De Infinitis Spiralibus Inverſis, Infinitiſque Hyperbolis Libelli *Schol.* 3. *Propoſitionis* 3. oſtendens rectangulum NIRH eſſe ad ſpatium IHN, ut quadratum NA ad $\frac{1}{5}$ quadrati NI, cum $\frac{1}{3}$ quadrati *a*I, & cum rectangulo CIN (quod conſonat dimenſioni mox ex aliis principiis afferendæ *Schol.* 1. *exempl.* 2.)

quare

quare & ejusmodi parabola rectificationem admittet.

COROLLARIUM XIII.

IMò generatim enunciari potest, quoties dupla differentia exponentium m, n metitur ipsum n, verbi causa per numerum p; semper curvam parabolicam ADB rectificari posse, erit enim $\frac{2m-2n}{n} = \frac{1}{p}$ adeòque rectangula aNI in ratione erunt tam submultiplicata ordinatarũ NH, quàm submultiplex $\frac{1}{p}$ unitatis, ipsęque ordinatæ proportionales erunt rectangulorum illorum potestatibus ab exponente p indicatis, unde singula membra potestatis ejusmodi rectangulorum ducta in axem curvę NI, & divisa per numerum dimensionum ejusdem NI singulis membris prędictis competentem, exhibebunt notam quantitatem rectis dumtaxat lineis definitam, quę ad spatium IHN datam prorsus rationem habebit; Id quod semper contingere patet, quùm

quùm m eſt numerus impar, & n par proximè minor, ut in duobus precedentibus Corollariis.

SCHOLION I.

Res clarior fiet exemplis analyticè expoſitis in hunc modum. Sit $IC = a$, $IN = x$, $NH = y$; quoniam ergo $2ax + xx$ proportionatur $y^{\frac{1}{p}}$, ſumi poterit velut ipſi æqualis (ſi nempe hic multiplicari, aut dividi intelligatur per conſtantem aliquam quantitatem unitatis loco ſumptam, ut dimenſiones ſuppleat) unde & æquè elevando utrumque terminum, erit $\overline{2ax + xx}^{p} = y$, ſpatiique IHN elementum $ydx = \overline{2ax + xx}^{p} dx$, quę eſt quantitas facilè integrabilis, ductis ſingulis membris (loco differentialis dx) in x, ac per exponentem ipſius x unoquoque diviſo.

Exemplum I. In caſu corollarii 11. $p = 1$, itaque $ydx = 2axdx + xxdx$, cujus integrale

le $axx + \frac{x^3}{3}$ ęquabit valorem ſpatii I H N.

Exemplum II. In caſu corollarii 12. $p = 2$, itaque $y\,dx = 4aaxx\,dx + 4ax^3\,dx + x^4\,dx$, cujus integrale eſt $\frac{4aax^3}{3} + ax^4 + \frac{x^5}{5} =$ ſpatio I H N.

Exemplum III. Si exponentes parabolę ſint, $m = 7$, $n = 6$; erit $\frac{2m - 2n}{n} = \frac{1}{3}$, unde $p = 3$; itaque $y\,dx = 6a^3x^3\,dx + 12aax^4\,dx + 6ax^5\,dx + x^6\,dx$, cujus integrale $= \frac{3a^3x^4}{2} + \frac{12aax^5}{5} + ax^6 + \frac{x^7}{7}$ $=$ ſpatio I H N.

Et ſic in aliis pari progreſſu.

SCHOLION II.

Eodem ratiocinio infinitarum Hyperbolarum inter aſymptotos poſitarum dimenſionem reduces ad infinitas Hyperboloides iis, quas ſupra conſideravimus, reciprocas, nempe quarum ordinatarum N H, nb poteſtates quęlibet reſpondeant reciprocè

procè rectangulis anI, aNI, quibus manifestum est asymptotos futuras rectas I 4, IN, observabisque exponentem potestatum in ordinatis ad has Hyperboloides prędictis rectangulis reciprocarum esse fractionem $\frac{2m + 2n}{n}$, in qua scilicet duplum aggregatum exponentium coordinatarum ad asymptotos hyperbolæ datæ denominatur per exponentem distantię ordinatæ à centro, ut simili calculo repetito constare posset, nisi jam pigeret antiqua vestigia iterum premere, nulla spe id Hyperboloidũ genus aliquod saltem quadrandi nunc pręlucente, ac laboris asperitatem alleviante.

SCHOLION III.

ITaque consultius erit ad seriem infinitam Curvæ longitudinem revocare, eritque Curva quælibet (cujus axis $= x$, ordinata $= y$, subtangens $= t$) æqualis integrali hujus seriei $dx + \frac{y\,dy}{2t} - \frac{y^3\,dy}{8t^3} + \frac{3y^5\,dy}{48t^5}$ &c. continuandæ *ut in Hugenianis pag.* 127. quę-

quæ quidem, determinata relatione curvæ naturam exprimente, ſive ipſius t valore in terminis ab ipſo y integrè affectis, integrari poterit. Exemplo ſit Logarithmica, cujus ſubtangens eadē ſemper conſtans linea eſt, quæ pro unitate uſurpata dabit integratam ſeriem $= x + \frac{yy}{4} - \frac{y^4}{32} + \frac{y^6}{96}$ &c. = longitudini Curvę ipſis x & y correſpondentis.

Quòd ſi infinitarum parabolarum parameter ſit = 1, aut ℞ quadrati ſpatio aſymptotico in quavis ex infinitis hyperbolis inſcripti ſimiliter = 1, ęquatione curvę naturā exprimente $y^m = x$ (ubi per m quemlibet numerum ſignifico, poſitivum, aut negativum, integrum, fractumue, ut libuerit) ſubtangens erit perpetuò $= my^m$; itaque Parābolicæ, aut Hyperbolicæ cujuſlibet Curvæ longitudo, ſive integrale primę ſeriei evadet $= x \frac{-1}{\overline{1m-2}.2my^{m-2}} \frac{+1}{\overline{3m-4}.8m^3y^{3m-4}} \frac{-3}{\overline{5m-6}.48m^5y^{5m-6}}$ &c.

Vel

Vel etiam eadem infinitarum parabolarum, & hyperbolarum longitudo, ut dudum præstitimus, reducetur commodè ad sequentem seriem $y + \frac{m^2 y^{2m-1}}{2 \,.\, \overline{2m-1}}$ $- \frac{m^4 y^{4m-3}}{2 \,.\, 4 \,.\, \overline{4m-3}}$ $+ \frac{3 m^6 y^{6m-5}}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, \overline{6m-5}}$ $- \frac{3 \,.\, 5 m^8 y^{8m-7}}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, \overline{8m-7}}$ $+ \frac{3 \,.\, 5 \,.\, 7 m^{10} y^{10m-9}}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10 \,.\, \overline{10m-9}}$ &c. ubi puncta numeris inserta multiplicationem ex more significant; ita ut in Apolloniana Parabola, ubi $m = 2$, Curva sit $y + \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} y^5 + \frac{4}{7} y^7 - \frac{10}{9} y^9 + \frac{28}{11} y^{11}$ &c. unde progrediendo quantumvis acuratam Curvæ longitudinem determinare licebit, acceptis rectarum proportionalium y, y^3, y^5, y^7 &c. partibus supra expressis per substitutionem valoris ipsius m ex generali serie deductis.

Quod quidem Theorema cùm superiori anno Egregio Juveni Gabrieli Manfredio ex more communicassem, Is & ad editionem

nem me perhumaniter eſt cohortatus, & eleganti demonſtratione dignatus eſt confirmare, doctiſſimaque animadverſione, imò & nobiliorum Veritatum acceſſione illuſtrare, cujus Epiſtolæ fragmentum ad fidem iis, quæ dixi, conciliandam producere non verebor, ſingularem ejus mentis profunditatem, & in res meas humanitatem altero hoc ſpecimine teſtaturus, quamquàm utriuſque veſtigiis aliquot, ne illi, mihique crearent invidiam, conſultò refectis.

EX ALTERA EPISTOLA

V. CL. GABRIELIS MANFREDII

Ad Auctorem ſcripta Bonon. 8. Auguſti 1702.

... Tranſeo nunc ad ſubtiliſſimũ illud Theorema tuum, puod mihi ſummo honore cõmunicare dignatus fuiſti. Ego ſyncerè fateor, & ſeriò hoc tibi maxima cum lętitia profiteor, quòd ex melioribus, & maximè utilibus totius Geometriæ adhuc inventis ſit cenſendum--- Sanè Ueritate ejus comperta, & Vtilitate, quæ multa eſt, optimè

optimè perspecta, Tibi Uir Carissime, & Doctissime, omni officiorum debito devinctum me agnosco, quòd me præ cęteris hoc distinctionis gradu digneris, quo aliquid mihi gloriosius contingere posse non credam, ut siquidem Theorematis hujus Nobilissimi, cùm Laudes in omnium ore audivero (quod tunc accidet, cùm Publico illud impertitus fueris, ut autem citò citiùs impertiaris enixè supplico] illos me præcessisse, & ejus Pondus ante cateros agnovisse possim gloriari.

Tali autem ratiocinio Tuum hoc Inventum confirmo. Esto æquatio $y^m = x$, *undè* $m y^{m-1} dy = dx$, *& curvæ elementum* $dy\sqrt{1 + mm y^{2m-2}}$ *est porrò* $\sqrt{1 + mmy^{2m-2}}$

$$= 1 \quad \frac{+ mmy^{2m-2}}{2} \quad \frac{- m^4 y^{4m-4}}{2.4}$$

$$\frac{+ 3m^6 y^{6m-6}}{2.4.6} \quad \frac{- 3.5 m^{8m-8}}{2.4.6.8}$$

$$\frac{+ 3.5.7 m^{10} y^{10m-10}}{2.4.6.8.10}$$ *&c. (Sic Newtonus radices extrahit) quare ipsius Curvę elementum*

tum erit series $dy + \frac{mmy^{2m-2}dy}{2} - \frac{m^4 y^{4m-4} dy}{2.4} + \frac{3m^6 y^{6m-6} dy}{2.4.6} - \frac{3.5m^8 y^{8m-8}dy}{2.4.6.8} + \frac{3.5.7m^{10}y^{10m-10}dy}{2.4.6.8.10}$ *&c. cujus integrale, nempe ipsa curvæ* $y^m = x$ *longitudo, erit* $y + \frac{mmy^{2m-1}}{2.\overline{2m-1}} - \frac{m^4 y^{4m-3}}{2.4.\overline{4m-3}} + \frac{3m^6 y^{6m-5}}{2.4.6.\overline{6m-5}} - \frac{3.5m^{8m-7}}{2.4.6.8.\overline{8m-7}} + \frac{3.5.7m^{10}y^{10m-9}}{2.4.6.8.10.\overline{10m-9}}$ *&c.*

Unde patet, ad hoc ut tua Analysis valeat, debere tantùm quantitates mmy^{2m-2}, *aut alias, quas earum loco debeas ex curvæ natura substituere, tales esse, ut omnes earum potestates in* dy *ductæ sint integrabiles. Debent igitur curvæ, in quibus utilis esse potest tua series, ferè esse ex iis, in quibus indeterminatarum alterutra* x *sola unam æquationis partem constituere potest, reliqua æquationis parte ex quotvis terminis interim composita, in quorum singulis altera indeterminata ad quamvis po-*

 testa-

testatem elevata inveniatur, nullo insuper radicali signo, quod indeterminata ingrediatur, partem illam æquationis implicante, nec ullo insuper denominatore, quem indeterminata eadem ingrediatur, eandem æquationis partem afficiente; Talis esset curva, cujus æquatio foret $x = \frac{by^m + cy^n + y^p + ay^q \text{ \&c.}}{f}$

exponentibus m, n, p *&c. denotantibus quosvis numeros positivos, vel negativos, integros, vel fractos, rationales, vel surdos &c. Quales quidem curvas omnes quadrabilia spatia continere repereram. Si enim curvæ alicujus æquatio talis sit, qualem modò exposui,* $x = \frac{by^m + cy^n \text{ \&c.}}{f}$ *hic valor indeterminatæ* x *erit tantùm per progressionem arithmeticam dividendus, cujus progressionis termini sint respectivè* m, n, p, q *&c. singuli unitate aucti, & talis ritè institutę divisionis quotiēs erit per* y *multiplicandus, eritque productum spatium, quod axe [axe siquidem super quo ipsæ* y *assumuntur) curva, & ipsa* x *continetur &c.*

Haud difficiliùs etiam invenies, omnes tales curvas, quas quadrabilia spatia continere con-

clusi-

clusimus, si super axem rotentur, super quo ipsę x assumuntur, solida efficere faciliter ad cylindros ejusdem basis, & altitudinis reducibilia, &c.

Hactenus Vir Doctissimus; cujus elegans Generalium Quadraturarum Theorema sic vicissim libet analyticè ostendere. Quoniā $x = \frac{by^m + cy^n + y^p + ay^q \text{ \&c.}}{f}$ erit $x\, dy$, elementū scilicet spatii, quod Acutissimus Juvenis cōsiderat, $= \frac{by^m dy + cy^n dy + y^p dy \text{\&c.}}{f}$ cujus integrale, nempe ipsum spatium prædictum $= \frac{by^{m+1}}{m f + f} + \frac{cy^{n+1}}{n f + f} + \frac{y^{p+1}}{p f + f} + \frac{ay^{q+1}}{q f + f}$ &c. ut ipse pronunciavit, ejusque complementum æquabitur eidem seriei; singulis priùs terminis per suos exponentes m, n, p &c. ductis, nam elementū tunc est ydx, at differentiando primā ęquationē curvę constitutivā prodit $dx = \frac{mby^{m-1}dy + ncy^{n-1}dy + py^{p-1}dy \text{\&c.}}{f}$ quare $ydx = \frac{mby^m dy + ncy^n dy + py^p dy \text{\&c.}}{f}$ ejusq. integrale $= \frac{mby^{m+1}}{mf+f} + \frac{ncy^{n+1}}{nf+f} + \frac{py^{p+1}}{pf+f}$ &c.

 Quod

Quod attinet ad solida ab his spatiis, qua parte ad axem x spectant, revolutis progenita, animadvertendum est, rationem solidi ex cujusvis figuræ rotatione resultantis ad cylindrum ejusdem basis, & altitudinis, eandem esse cum ratione summæ ex omnibus quadratis ordinatarum figuræ genitricis ad summam ex totidem quadratis linearum ultimæ basi æqualium, ut methodo indivisibilium docemur; porrò summa ex omnium ordinatarum y quadratis respectu axis x est $\int yydx$, sive, pro dx substituto ejus valore supra invento, integrale fractionis $\frac{mby^{m+1}dy + ncy^{n+1}dy \text{ \&c.}}{f}$ hoc est series $\frac{mby^{m+2}}{mf+2f} + \frac{ncy^{n+2}}{nf+2f}$ &c. summa verò ex totidem quadratis ipsi yy æqualibus est yyx, sive $\frac{by^{m+2} + cy^{n+2} \text{ \&c.}}{f}$ adeòque ad cylindros ejusdem basis, & altitudinis facilè reducentur hæc solida.

Hinc ex hac ratione solidorum auferendo rationem, supra expositam, spatii curvilinei solidum generantis ad rectangulum

yx, quo cylindrus producitur, prodit ratio distantiæ ab axe centri gravitatis ejusdem spatii curvilinei ad semissem ordinatæ y, per quam distat centrum gravitatis dicti rectanguli ab eodem axe.

Subtangens cujuslibet ex talibus curvis, in axe x determinata, semper erit = $\frac{mby^m + ncy^n \ \&c.}{f}$, ut constat substituto valore ipsius dx in generali subtangentis expressione $\frac{ydx}{dy}$, subnormalis verò in eodem axe accepta = $\frac{f}{mby^{m-2} + ncy^{n-2} \ \&c.}$ quippe quæ cum subtangente contineat rectangulum = yy: eademque methodo infinitæ aliæ quæstiones, ejusmodi curvarum genus concernentes, facillimam determinationem suscipiunt, imò crepundia sunt hæc nobilissimæ recentiorum analysis, cujus præstantiam vel ex hoc uno specimine satis intelligere possumus, ejusque [immensè quantùm!] protensam utilitatem admirari; Nam de Infinitis Parabolis quot libros ab Acutissimis Geometris exaratos habemus? Jam illæ satis minimam, &c.

quantitatibus utcunque implicatos, elici possunt expressiones dictarum dimensionũ ex una hac Clariss. Juvenis animadversione, quippe eo fine terminorum numerus in altera æquationis parte indeterminatus relinquitur, ut quot quis voluerit oportunè respondeant, ibique sistere, aut ultrà promoveri, ubi, & quòusque opus fuerit, valeamus; Nec enim hæ series infinitæ semper sunt [quamquàm & tales esse nil vetat] sed plerumque semet determinãt pro varia curvarum natura, ut dictum est, absolutamque spatiorum, & solidorum dimensionem renunciant.

SCHOLION IV.

Denique monendus es, Mi Lector, quidquid in Propositione hac, & Corollariis eidem adnexis, illatum est circa rectificationem curvarum redactam ad spatii, per tangentium F G ordinationem provenientis, dimensionem, potuisse aliis modis obtineri, exempli causa ponendo ipsas E H ęquales portionibus rectarum ad curvã in D normalium, per duas A Z, C B parallelas inter-

interceptis, nam & ſpatiũ hinc proveniens 8 B C I H *h* ęquaretur rectangulo ipſius C A in curv. m A D B, & portio quævis H I C E rectangulo ejuſdem A C in correſponden-tem arcum A D, nec differt demonſtratio ab ea, quam dedimus in Propoſitione.

Aut generaliùs, ſi fiat conſtans quælibet linea, putà C*a*, ad E H, ut ordinata M D ad tangentem D F, vel ut ſubnormalis M C ad normalem C D, vel in alia æquivalen-ti ratione functionum curvæ ad punctum D ſpectantium, ſpatium hinc proveniens erit ſemper æquale rectangulo illius aſſum-ptę conſtantiis C*a* in curvam A D B, & portiones ejus = rectangulis ejuſdem con-ſtantis in arcum ſibi competentē; nec enim alia ratione juſſimus in pręced. aſſumi E H = tangentiũ, vel normaliũ partibus, inter parallelas AC, BZ, aut CB, AZ interceptis, niſi ut cōſtans linea CB, vel CA eſset ad EH in dicta ratione, ideſt ut elementũ ordinatę *d*O, vel *e*E, ad elementũ curvæ D*d*, unde æqualitas rectangulorũ infinitè parvorum proveniebat, redigens curvę rectificationē ad menſurã ſpatii ex ordinatis E H prove-nientis AD-

ADDENDA, NOTANDA.

IN prop. 4. etiamsi I k non esset ipsis H L, G K normalis, & etiamsi pro semicirculo supponeretur quęvis alia figura IHk, & pro quadrante B I *K* substitueretur figura orta ex ramis I M proportione mediis inter inclinatas I G, & interceptas I H, modò aplicatæ GD ipsi IK parallelæ æquales etiamnum forent abscissis I L, esset spatium figuræ KMBI subduplũ totius DQIkG, & quęvis portio MIT subdupla partis correspondentis DSVG; Indefinitè enim secta G *K* in partes æquales minimæ G *g*, ductaque I *mg*, erit triangulũ G I *g* ad simile circumscriptũ spatio kMI (quod finge esse *m* I S), ut *g* I ad tertiam prop-lem I *b*, sive ut K I ad I *l*, vel *ng* ad *gd*, aut ut paral mum *ng* G ad *dg* G circumscriptũ spatio D *d* S V G, & permutando, ut tr-lum G I *g* ad paral-mum *ng* G [idest semper in subdupla ratione] ita *m* I S ad *dg* G; Quare &c.

Rotatis etiam NIKG, DQIKG circa KG, erit cylindrus ad solidum, ut triangulum GIK ad spatium HFKI; semper enim tri-lum G I *g* ad simile adjacens lateri I H, quod inscriberetur figuræ H F K I est ut quadratum G I ad quadratum H I, vel ut circulus progenitus ex radio N G ad cir-

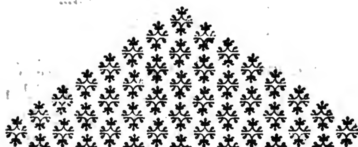
ad circulum radio D G, sive ut cylindrus ex paral-mo N g ad cylindrum solido inscriptum ex paral mo D G g, existentibus tam triangulis G I g, quàm cylindris N g invicē æqualibus. Rem, si placet, ad Veterum normam exigito, ego generaliorem Veritatum harum fontem indicasse concontentus, exhaurire non curo.

Itē Coroll. II. & III. fermè generatim verificantur, manet enim illorum rectangulorum D P K, & I K in H L æqualitas, & rotundi solidi circa asymptoton cum duplici annulo ex figura K H I circa ipsas N I, K G.

Verùm longè majoris momenti est edita jam emendare, quàm ampliare. Nihil dico de innumeris preli vitiis orthographiam depravantibus, ut *phylosophia*, *facisse*, *grevitatis*, *serieri*, & id genus aliis, quæ ut sensum non turbant, ita veniam facilè admittent, sed de sequentibus, in quibus permutatio, vel omissio litterarum Lectorum menti tenebras offundere potest, queque ideò ante lectionem corrigi cupio, ut pag. 24. lin. 2. habetur *duorum* pro *trium*; pag. 27. l. 13. P R pro P K; pag. 28. l. 5. H L pro O P; pag. 31. l. 5. & 7. L I pro L *l*, lin. 12. C G pro g G; pag. 37. l. 18. M V pro M T; p. 52. l. 12. *a* 4 K 5 *b* pro *b* 4 K 5 *b*; p. 54. l. ult. B C A pro B O A; pag. 58. l. ult. C *d* pro C D; pag 59. l. 16. OPEADO pro OFEADO; pag. 66. l. 14. *nostro* pro *noto*; pag. 69. l. 14. G F pro C F, & lin. penult. A E = *a* pro A E = 1, C E = *a*; pag. 74. l. 9. DG :: CH pro *DA* :: *EC*. *AC*, *vel CH*, *& componendo*, *ac convertendo AD*. *DE* :: *CH*; pag. 78. lin. penult. *spatiolum* = pro *spatiolum elementare G g b H*, *evadet hoc* =; pag. 101 lin. 14. IHK pro I H *b*; aliave à me non animadversa.

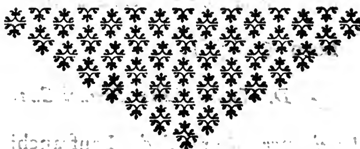
DEO VERITAS GLORIA.





Quis leget hæc? min' tu istud ais? nemo Hercule. nemo?
Vel duo, vel nemo: turpe, & miserabile. Quare?

A. Persius Sat. 1.



126

NOS D. DAMASCENUS DE MUTIIS

Abbas SS. Hippoliti, & Laurentii de Faventia, & totius Camaldulensis Ordinis Generalis.

CUm opus inſcriptum *Quadratura Circuli, & Hyperbola &c.* P. D. Guidonis Grandi in Piſano Atheneo Lectoris, & noſtræ Congregationis Monachi, aliquot ex eadem Congregatione S. Th. Magiſtri, quibus id commiſſum fuit, recognoverint, & in lucem edi poſſe probaverint, facultatem facimus, ut Typis mandetur, ſi iis, ad quos ſpectat, videbitur. Datum Faventiæ ex noſtro Monaſt. SS. Hippol. & Laur. die 8. Aprilis 1703.

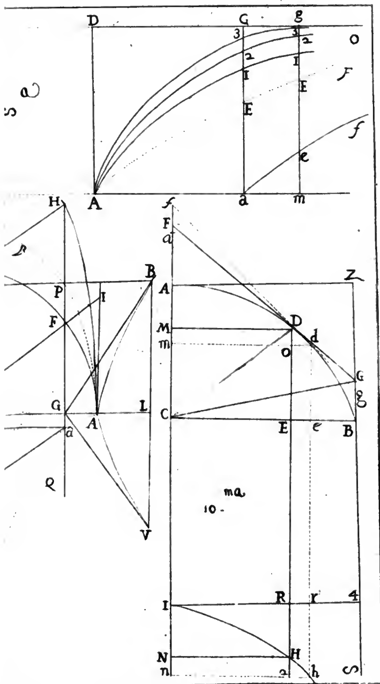
D. Damaſcenus de Mutiis Abbas Gener. Camald.

Loco ✠ Sigilli.

D. Marius Fælix Ferrari Cancell.

Imprimatur. Annibal de Lanfranchis Chicchuli Can. & Vic. Gener.

Imprim. Cancell. S. Off. Piſarum.


D
G
g
3
2
1
O
E
F
f
e
A
a
m
H
F
B
P
I
Z
M
m
O
d
G
g
C
E
e
B
L
Q
V
ma
10
I
R
r
4
N
H
n
h

MC

